バイパス・パーシステンス図の安定性

Stability of Bipath Persistence Diagrams

多田駿介 (Shunsuke Tada)[1]

[1] 東北大学 数理科学共創社会センター (Mathematical Science Center for Co-Creative Society, Tohoku University)
e-mail : shunsuke.tada.e6@tohoku.ac.jp

1 概要

本講演では, パーシステントホモロジーの拡張として提案されたバイパス・パーシステントホモロジーを紹介し, さらに, 位相空間上のバイパス関数から誘導されるバイパス・パーシステントホモロジーの安定性定理について述べる. この定理は, 従来のパーシステントホモロジーの安定性定理と同様に, 入力（バイパス関数）の微小な変化が出力（バイパス・パーシステンス図）に与える影響も小さいことを保証するものである. 本結果は, ノイズを含むデータに対して本手法を適用する際の理論的正当性を示唆する.

2 導入

パーシステントホモロジーは, データに内在する位相的特徴をパーシステンス図として出力する, 位相的データ解析の基本的な手法の一つである. 位相空間 X 上の実数値関数 f に対し, 劣位集合フィルトレーション $\{(f \leq r)\}_{r\in\mathbb{R}}$ をとる. ただし, $(f \leq r) := f^{-1}((-\infty, r])$. これにホモロジー関手を適用して得られるベクトル空間と線形写像の図式 $(\{H_q(f \leq s)\}_{s\in\mathbb{R}}, \{H_q(f \leq s) \to H_q(f \leq t)\}_{s\leq t})$ を f のパーシステントホモロジーと呼ぶ. これは区間加群に分解され, パーシステンス図は各区間加群に対応する区間 $[a, b)$ を平面上の点 (a, b) にプロットすることで得られる.

パーシステンス図の安定性定理 [1] は関数 f の摂動がパーシステンス図に及ぼす変化が微小となることを保証し, ノイズを含むデータへの適用が正当化され, 応用上重要な役割を果たす.

最近, この枠組みを拡張したバイパス・パーシステントホモロジーが導入された [2]. これは, 両端点が一致する 2 つのフィルトレーション（バイパス・フィルトレーション）にホモロジー関手を適用して得られる図式であり, 区間加群に分解される. この性質により, バイパス・フィルトレーション内の位相的特徴はバイパス・パーシステンス図を用いて視覚的に解釈することができる.

3 バイパス・パーシステンス図の安定性

本節ではバイパス・パーシステンス図の安定性定理を述べる. 本節の内容は [3] に基づく.

バイパス半順序とは, 台集合を $(\mathbb{R} \times \{1, 2\}) \sqcup \{\pm\infty\}$ とし, 順序を次で定めた半順序集合である：

$$x \leq y :\iff \begin{cases} x = -\infty, \text{または} \\ y = +\infty, \text{または} \\ x = (s, i), y = (t, i) \in \mathbb{R} \times \{i\} \text{ かつ } s \leq t. \end{cases}$$

これは (1) のように表示することができる. 以降バイパス半順序を B と書く. $\mathbb{R}$ 上の区間の多重集合に定まるボトルネック距離の類似で, B 上の区間の多重集合間にはボトルネック距離 d_{B}([2, Definition 2.12]) が定まる.

$$B:\quad \underset{\bullet}{-\infty} \qquad \begin{array}{c} \mathbb{R}\times\{1\} \\ \hline \mathbb{R}\times\{2\} \\ \hline \end{array} \qquad \underset{\bullet}{+\infty} \tag{1}$$

位相空間 X 上の**バイパス関数** $f=(f_1,f_2)$ とは, X 上の B 値関数の組であり, 各 f_i は $(\mathbb{R}\times\{i\})\cup\{\pm\infty\}$ に値を取る関数で, かつ $f_1^{-1}(\{-\infty\})=f_2^{-1}(\{-\infty\})$ が成り立つものをいう.

バイパス関数間の距離を定めるため, 写像 $|\cdot,\cdot|_B\colon B\times B\to\mathbb{R}_{\geq 0}\sqcup\{\infty\}$ を与える：

$$|b_1,b_2|_B:=\begin{cases}0 & (b_1=b_2),\\ |r_1-r_2| & (b_1=(r_1,i),\ b_2=(r_2,i)\in\mathbb{R}\times\{i\},\, i=1,2),\\ \infty & (\text{それ以外}).\end{cases}$$

この記号のもと, 位相空間 X 上のバイパス関数 $f=(f_1,f_2)$, $g=(g_1,g_2)$ 間の距離を次で定義する：

$$\|f,g\|_B:=\max\left\{\sup_{x\in X}|f_1(x),g_1(x)|_B,\ \sup_{x\in X}|f_2(x),g_2(x)|_B\right\}.$$

次にバイパス関数からバイパス・パーシステントホモロジーの構成方法を述べ, 主定理を紹介する. バイパス関数 $f=(f_1,f_2)$ に対して, **バイパス・フィルトレーション** $\{(f\leq b)\}_{b\in B}$ を次で定める.

$$(f\leq b):=\begin{cases}f_1^{-1}(\{-\infty\}) & (b=-\infty),\\ X & (b=+\infty),\\ \{x\in X\mid f_i(x)\leq r\} & (b=(r,i)\in\mathbb{R}\times\{i\},\, i=1,2).\end{cases}$$

構成から $b_1\leq b_2$ なる B の要素に対して, $(f\leq b_1)\subseteq(f\leq b_2)$ が成立する. このバイパス・フィルトレーションにホモロジー関手を適用して得られるベクトル空間と線形写像の図式を $V(f)$ と書き, f の**バイパス・パーシステントホモロジー**と呼ぶ. また, 区間分解をして得られる区間の多重集合 $\mathscr{B}(V(f))$ を f の**バイパス・パーシステンス図**と呼ぶ.

定理 1（[3, Theorem 4.1]） $f=(f_1,f_2)$ および $g=(g_1,g_2)$ をある位相空間 X 上のバイパス関数とする. ただし, 次の条件が成り立っているとする：

$$f_1^{-1}(\{-\infty\})=f_2^{-1}(\{-\infty\})=g_1^{-1}(\{-\infty\})=g_2^{-1}(\{-\infty\}).$$

このとき, 不等式 $d_{\mathrm{B}}(\mathscr{B}(V(f)),\mathscr{B}(V(g)))\leq\|f,g\|_B$ が成立する.

この定理は（両端を除く）バイパス関数 f の摂動がバイパス・パーシステンス図 $\mathscr{B}(V(f))$ に及ぼす変化も微小であることを示唆している. なお, この定理は, 従来のパーシステンス図の安定性定理と同様に (バイパス・パーシステンス加群の) 代数的安定性定理を介して示される.

参考文献

[1] David Cohen-Steiner, Herbert Edelsbrunner, and John Harer. Stability of persistence diagrams. Discrete & Computational Geometry, 37:103–120, 2007.

[2] Toshitaka Aoki, Emerson G. Escolar, and Shunsuke Tada. Bipath persistence. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 42:453–486, 2025.

[3] Shunsuke Tada, Stability of Bipath Persistence Diagrams, arXiv preprint arXiv:2503.01614, 2025.