パーシステンス加群と区間表現

$$1 \longleftrightarrow 2 \longleftrightarrow 3 \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow n,$$

$$\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & a_n \arrow[dr] & \\
\vec{A}_{n,m} := s \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & t \\
 & b_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & b_m \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

半順序集合のハッセ図

名前　多田駿介
所属　神戸大学
人間発達環境学研究科
エスカラ研

日付　2023/2/21

自己紹介

名前　多田駿介　（位相的データ解析）

趣味　・Youtube コスメティック田中　ホモサピ　バキ童チャンネル
（お勧めのチャンネルとか教えてください）

・散歩

・（友人と）グリーン・タオの定理のセミナー

・日本酒やみりん(甘いお酒が好きです)

皆様への一言　自分は数学とデータ解析の繋がりに興味を持っています.
よろしくお願いいたします。

結果

P:半順序集合(を圏としてみる)
Pから有限次元ベクトル空間の圏への任意の関手(パーシステンス加群と呼ぶ)が区間分解可能であるための半順序集合Pの必要十分条件を決定した.

$$1 \longleftrightarrow 2 \longleftrightarrow 3 \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow n,$$

$$\vec{A}_{n,m} := \begin{tikzcd} & a_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & a_n \arrow[dr] & \\ s \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & t \\ & b_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & b_m \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

本日の発表の流れ

■位相的データ解析とは？

■1パラメータのパーシステンス加群

■2パラメータのパーシステンス加群

■区間表現

本日の発表の流れ

- ■位相的データ解析とは？
- ■1パラメータのパーシステンス加群
- ■2パラメータのパーシステンス加群
- ■区間表現

位相的データ解析とは？

位相的データ解析とは？

2000年頃から発展し始めてきている

データの解析手法

位相的データ解析とは？

2000年頃から発展し始めてきている

データの解析手法

トポロジーを用いたデータ解析

・パーシステントホモロジー解析

・Mapper解析

など

位相的データ解析とは？

2000年頃から発展し始めている

データの解析手法

トポロジーを用いたデータ解析

・**パーシステントホモロジー解析**

・Mapper解析

など

位相的データ解析とは？

パーシステントホモロジー解析の手法

データの形(穴や空洞)を記述

-
-

位相的データ解析とは？

パーシステントホモロジー解析の手法

データの形(穴や空洞)を記述

・データに隠された複雑なものから規則などを見つける
・

位相的データ解析とは？

パーシステントホモロジー解析の手法

データの形(穴や空洞)を記述

・データに隠された複雑なものから規則などを見つける
・データから穴を見つける

位相的データ解析とは？

パーシステントホモロジー解析の手法

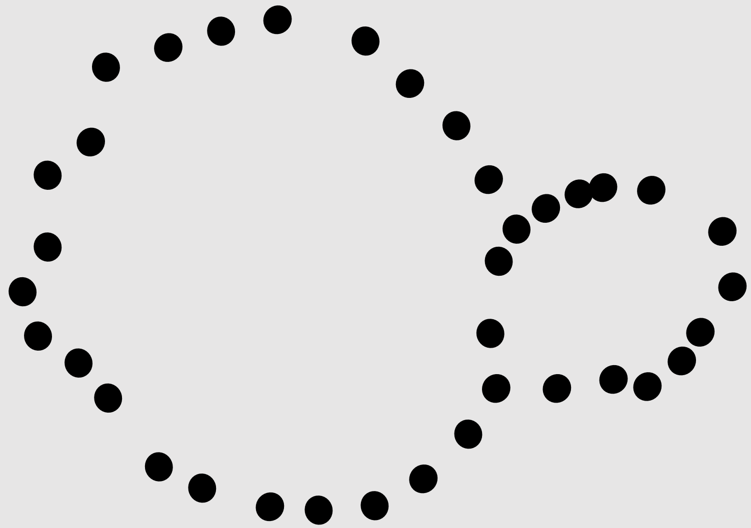
データの形(穴や空洞)を記述

・データに隠された複雑なものから規則などを見つける
・データから穴を見つける

雰囲気をつかんでみよう

位相的データ解析とは？

パーシステントホモロジー解析の手法

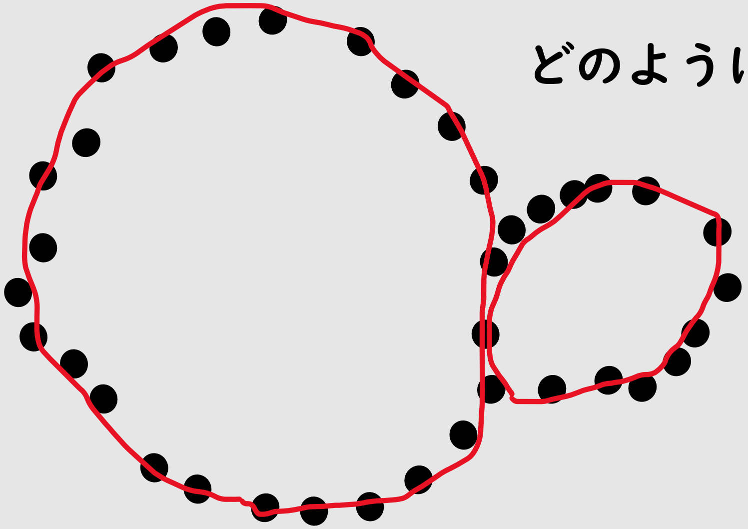


t_0

位相的データ解析とは？

パーシステントホモロジー解析の手法

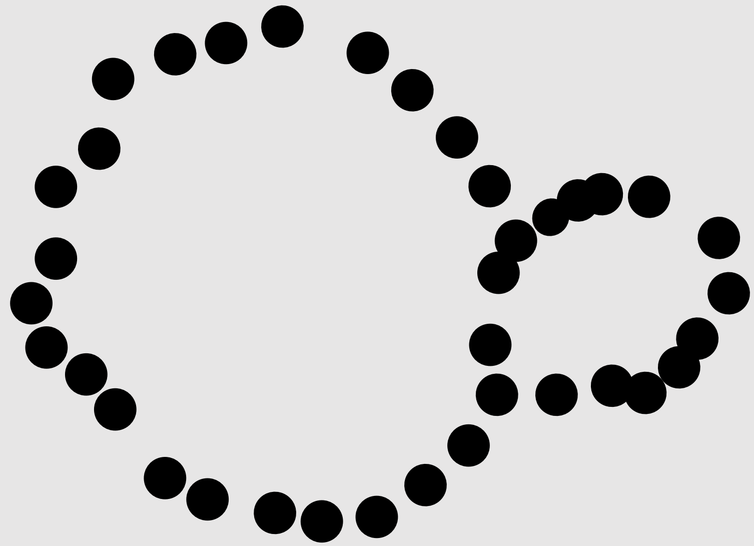
左右に2つの穴があるように見える．左側が大きくて右側が大きい．どのようにして数学的に表現する?



t_0

位相的データ解析とは？

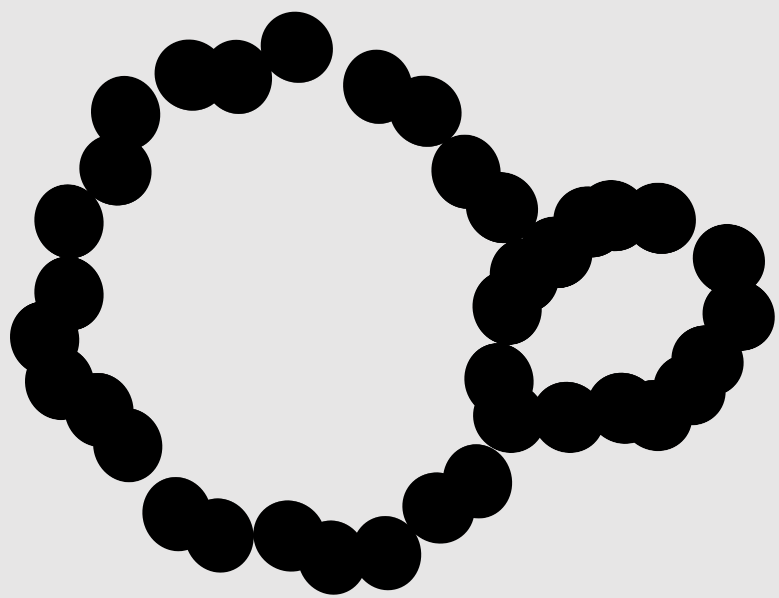
パーシステントホモロジー解析の手法



t_1

位相的データ解析とは？

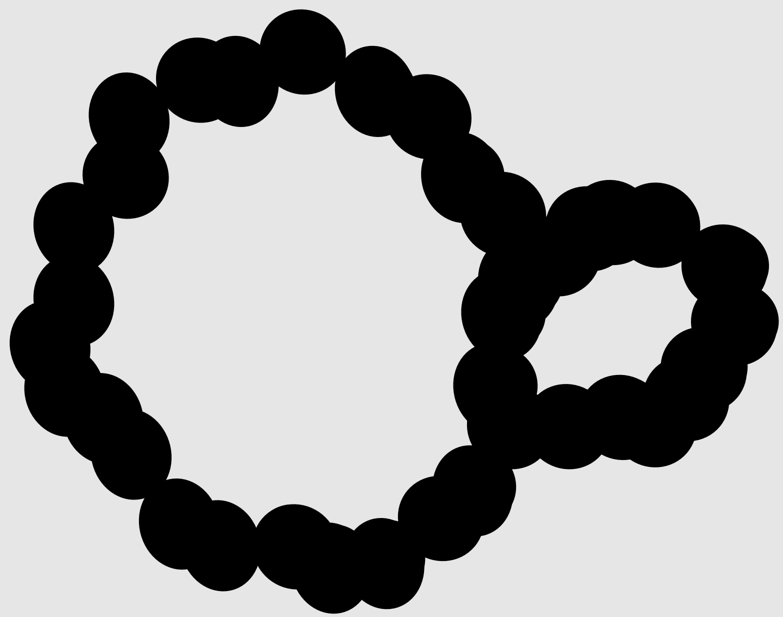
パーシステントホモロジー解析の手法



t_2

位相的データ解析とは？

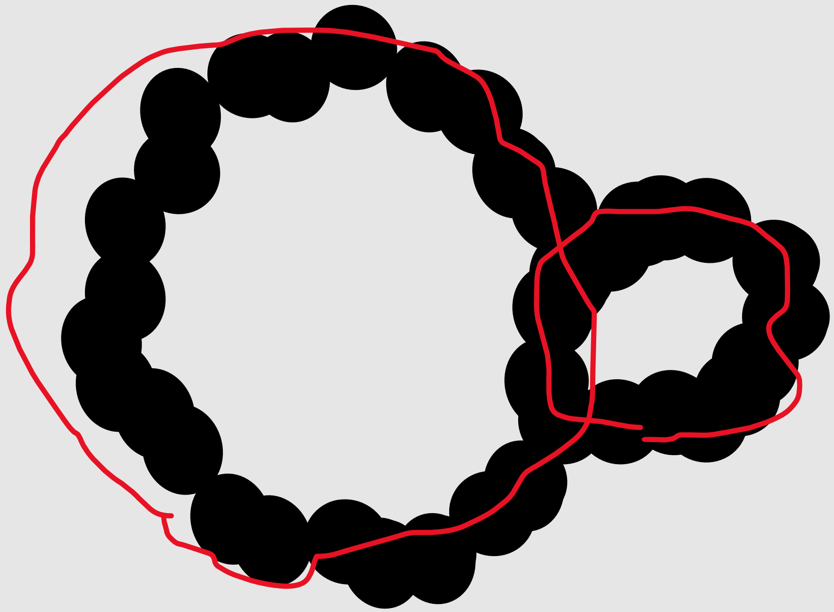
パーシステントホモロジー解析の手法



t_3

位相的データ解析とは？

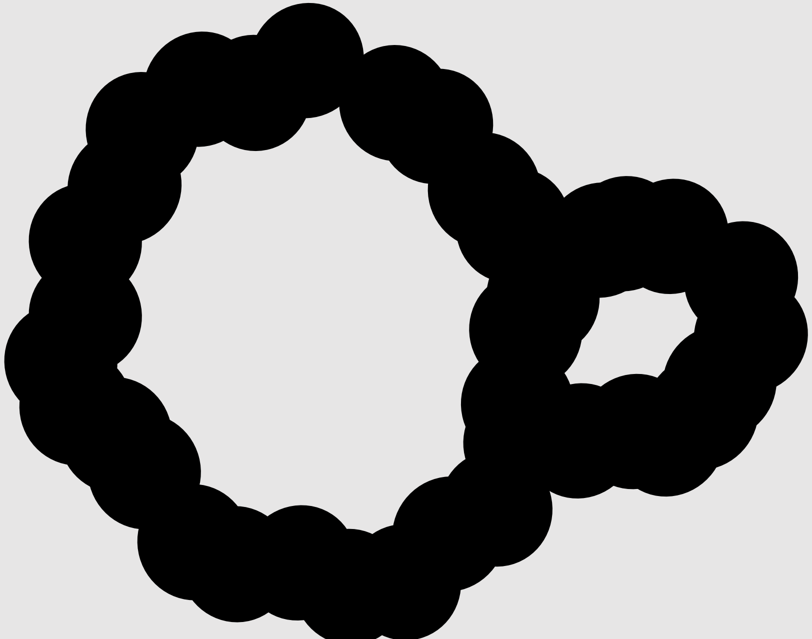
パーシステントホモロジー解析の手法



t_3

位相的データ解析とは？

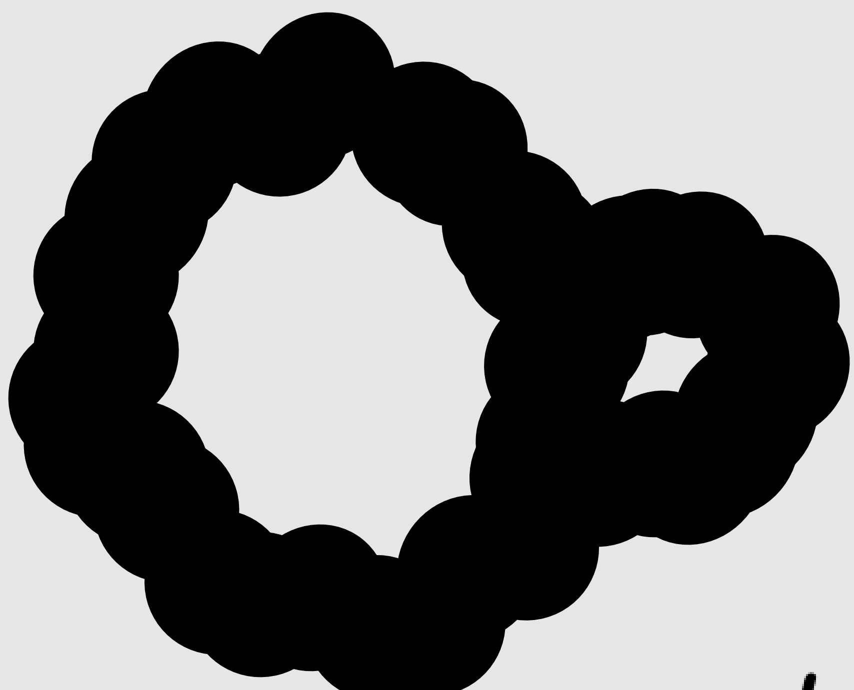
パーシステントホモロジー解析の手法



t_4

位相的データ解析とは？

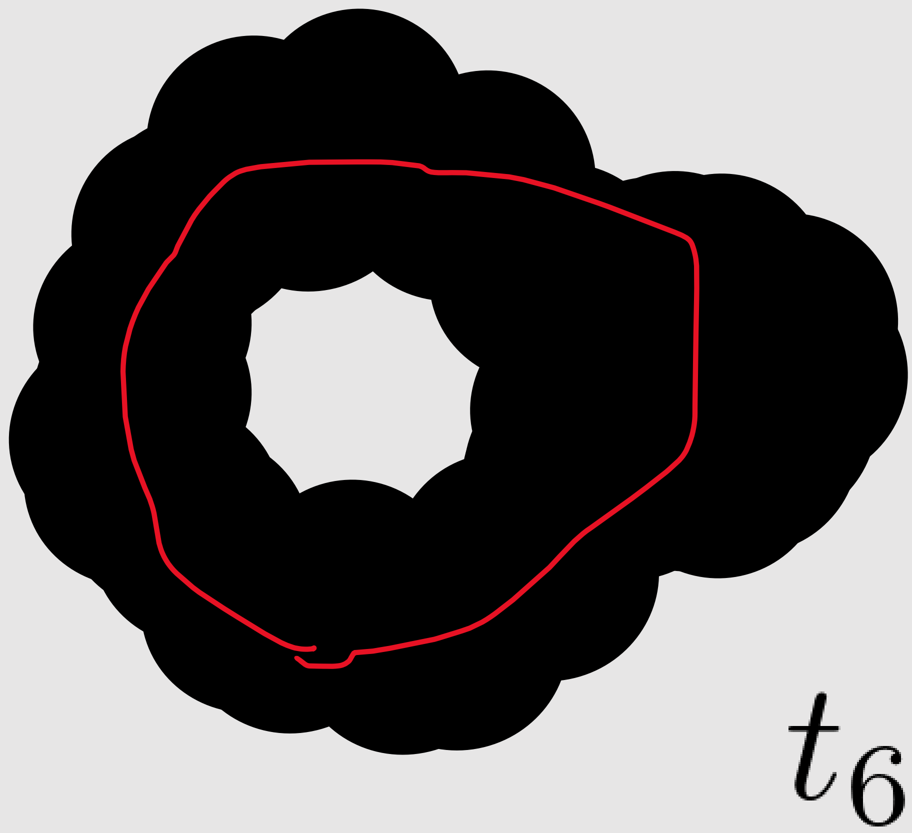
パーシステントホモロジー解析の手法



t_5

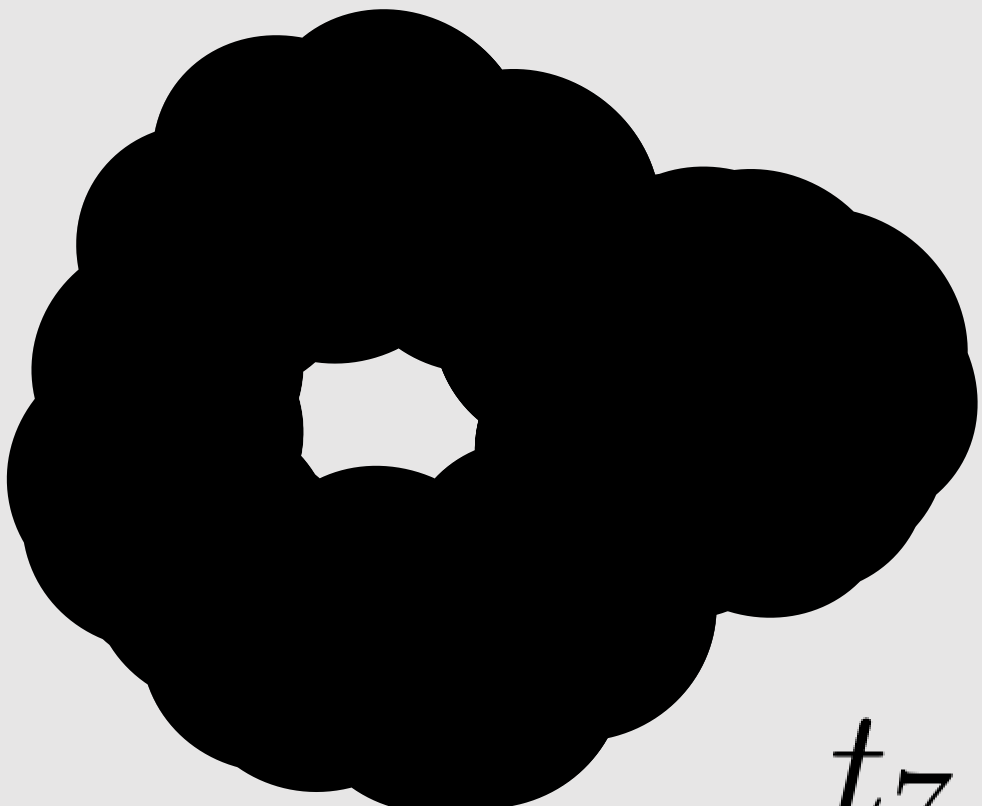
位相的データ解析とは？

パーシステントホモロジー解析の手法



位相的データ解析とは？

パーシステントホモロジー解析の手法



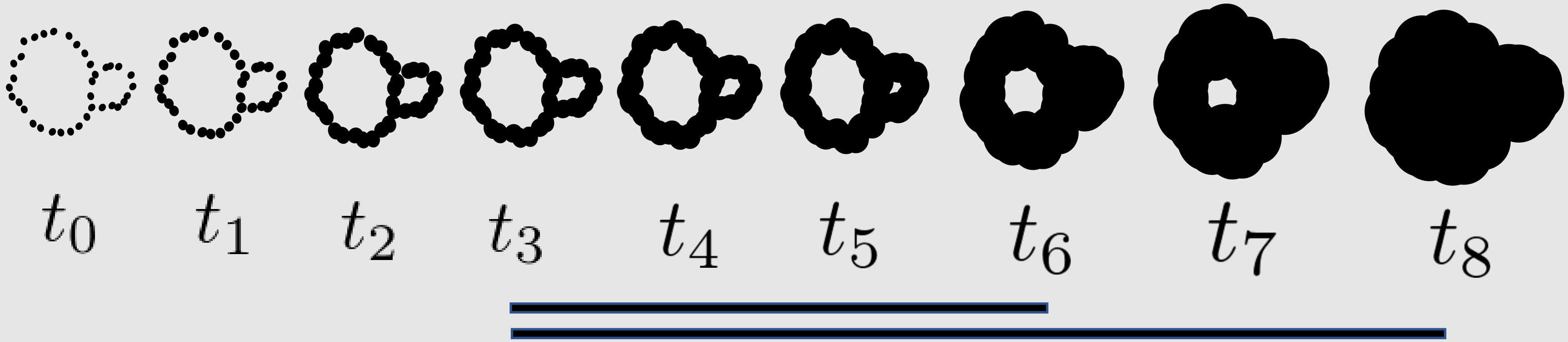
t_7

位相的データ解析とは？

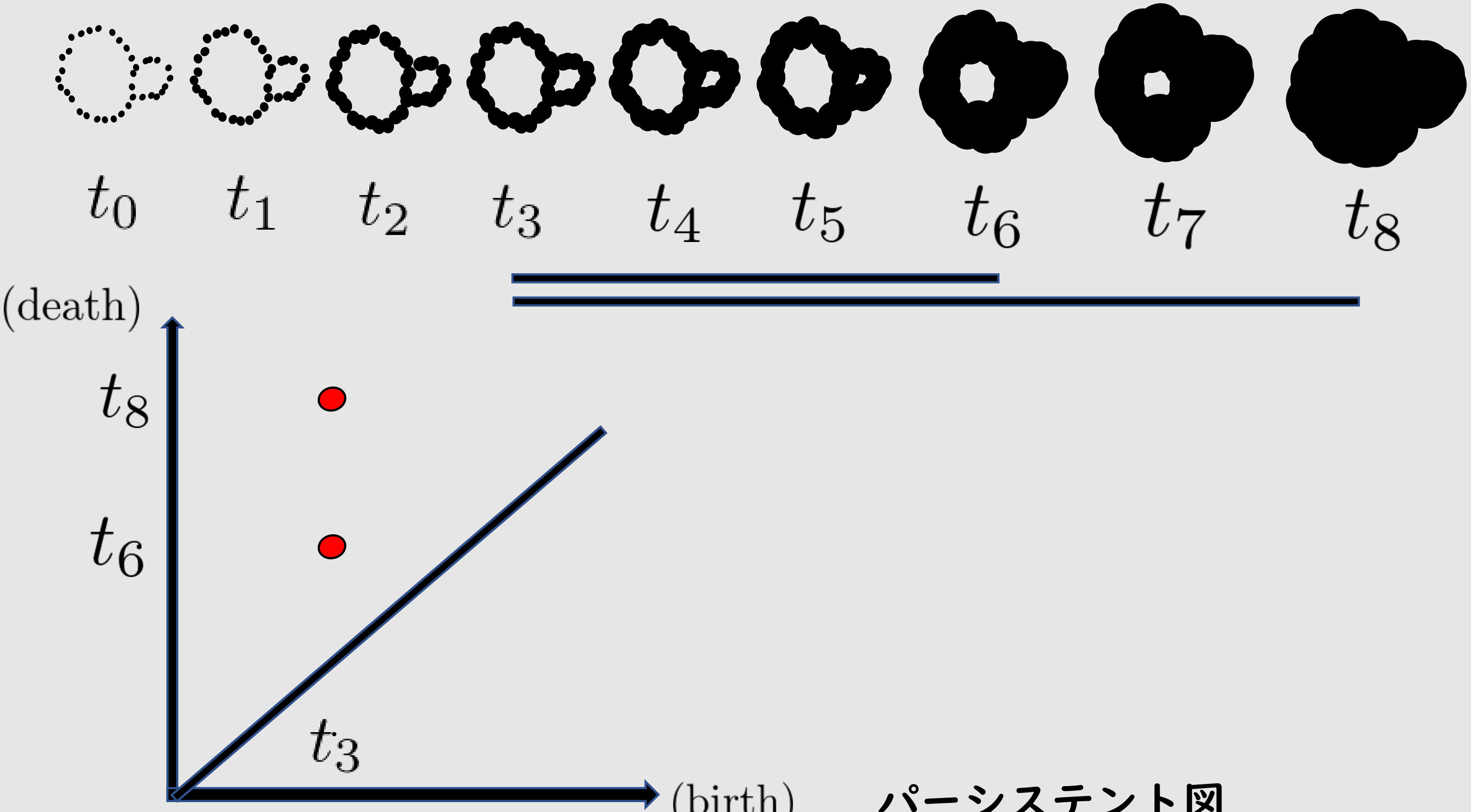
パーシステントホモロジー解析の手法

t_8

位相的データ解析とは？

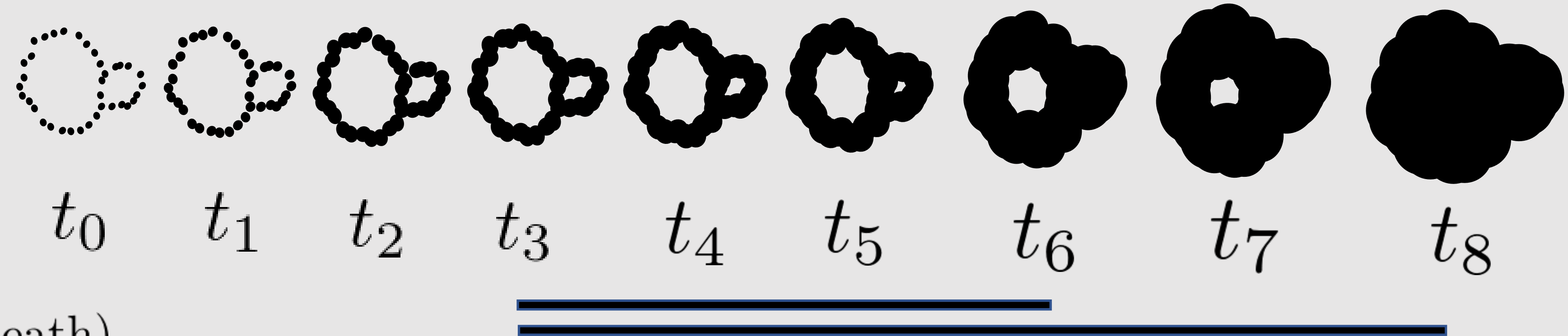


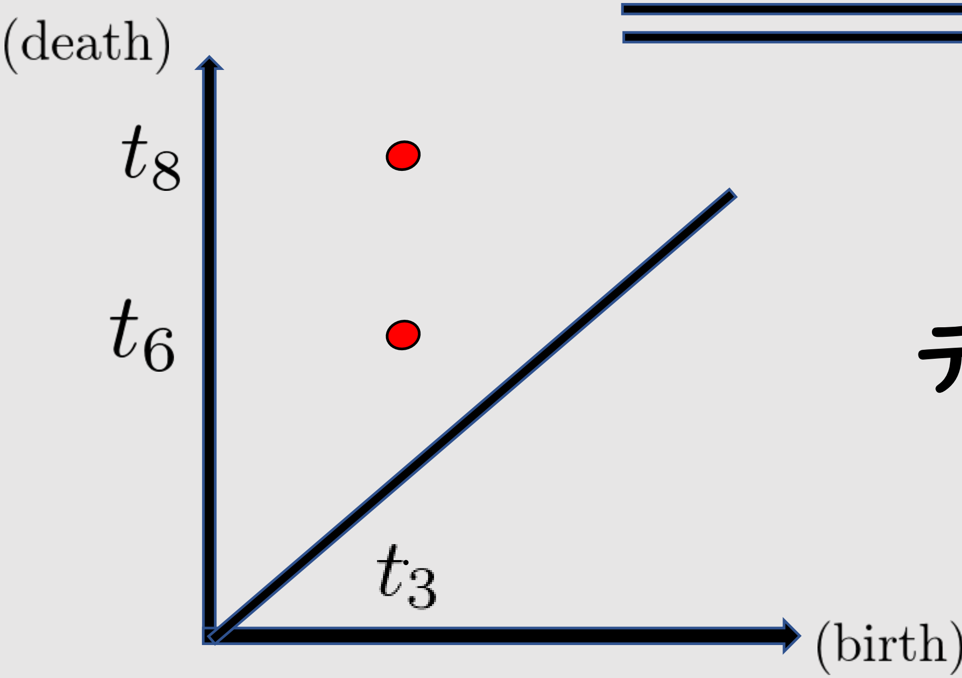
位相的データ解析とは？



パーシステント図

位相的データ解析とは？





データの形を記述!!!!

パーシステント図

位相的データ解析とは？

材料科学（Ex.ガラスの構造）

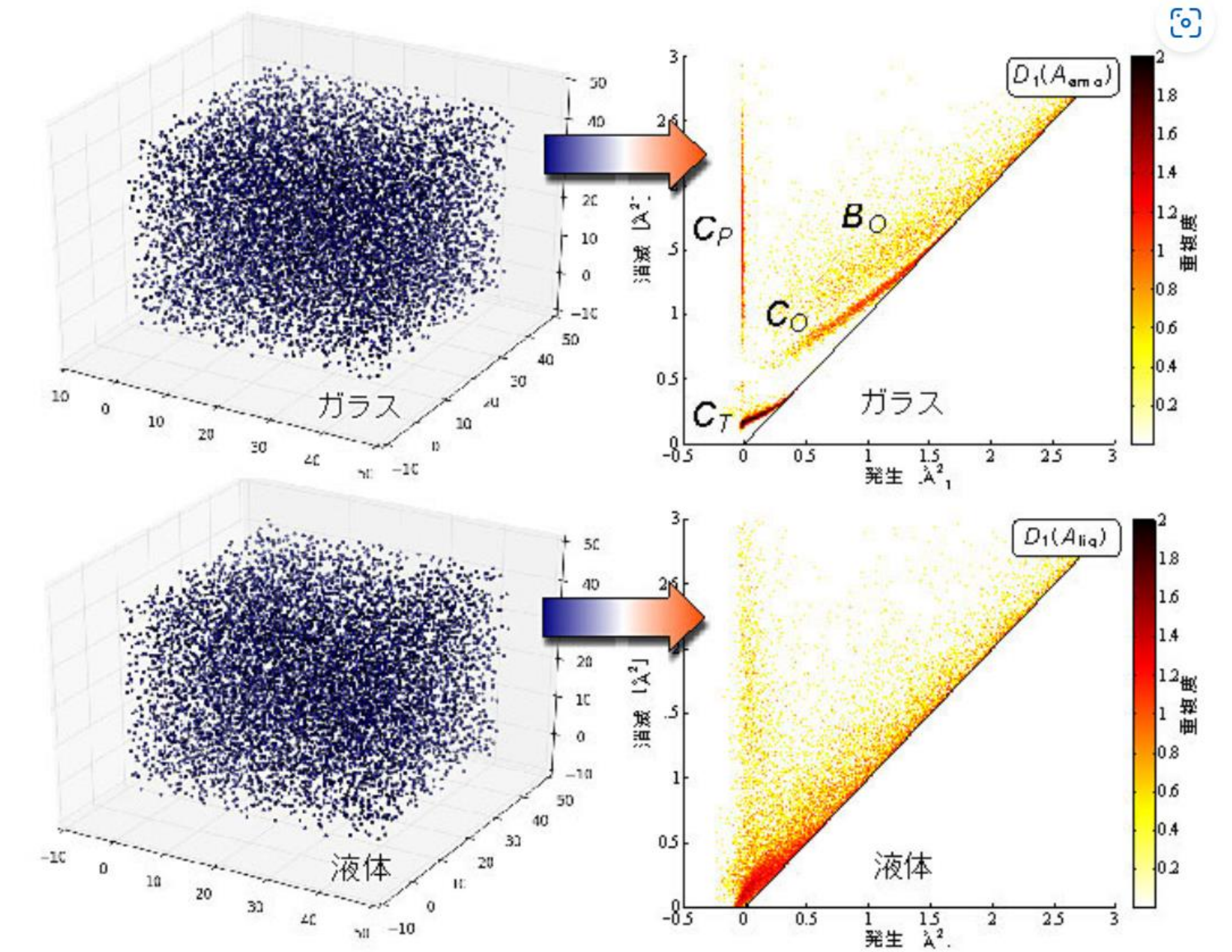


図1　ＳｉＯ２の原子配置（左）とそのパーシステントホモロジー（右）

Y. Hiraoka et al. “Hierarchical structures of amorphous solids characterized by persistent homology”
Proceedings of the National Academy of Sciences

画像は
[共同発表：ガラスの「形」を数学的に解明～トポロジーで読み解く無秩序の中の秩序～ (jst.go.jp)]
から引用

位相的データ解析とは？

応用例

パーシステントホモロジー解析

・進化生物学

・材料科学

・スポーツ科学

・数学

など沢山ある

(Zotero | Groups > TDA-Applicationsに掲載されているだけでも400部以上)

本日の発表の流れ

- ■位相的データ解析とは？
- ■1パラメータのパーシステンス加群
- ■2パラメータのパーシステンス加群
- ■区間表現

1パラメータのパーシステンス加群

率直にいうと，ベクトル空間と線形写像の列

$$V_1 \to \cdots \to V_m$$

1パラメータのパーシステンス加群

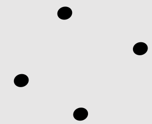
率直にいうと，ベクトル空間と線形写像の列

$$V_1 \to \cdots \to V_m$$

定義
全順序集合(を圏としてみたもの，Ex $\mathbb{N}$)
から有限次ベクトル空間の圏への関手

1パラメータのパーシステンス加群

データ

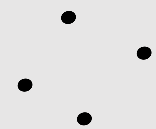


1パラメータのパーシステンス加群

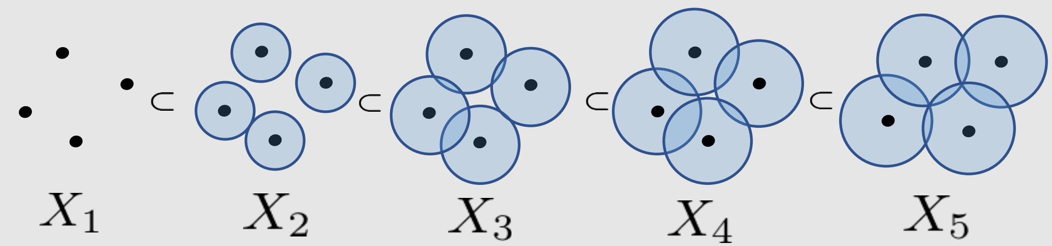
データ

↓

フィルトレーション

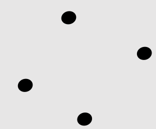


$\chi :=$

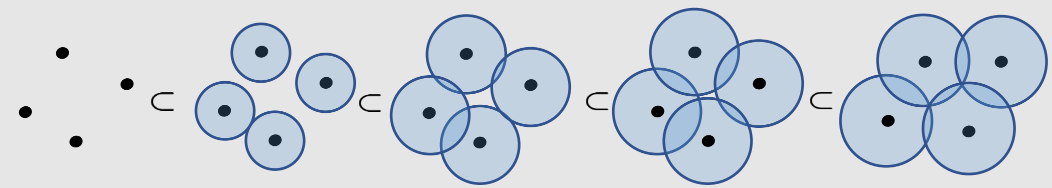


1パラメータのパーシステンス加群

データ



フィルトレーション

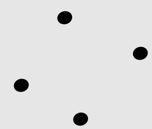


$$\chi := X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset X_4 \subset X_5$$

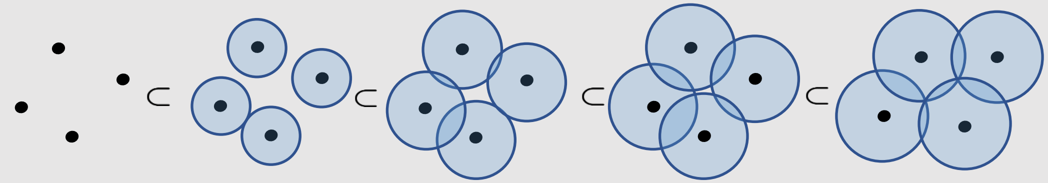
ホモロジー群を取る

1パラメータのパーシステンス加群

データ



フィルトレーション



$$\chi := X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset X_4 \subset X_5$$

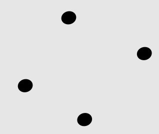
ホモロジー群を取る

パーシステンス加群

$$H_i(\chi) := H_i(X_1) \to H_i(X_2) \to H_i(X_3) \to H_i(X_4) \to H_i(X_5)$$

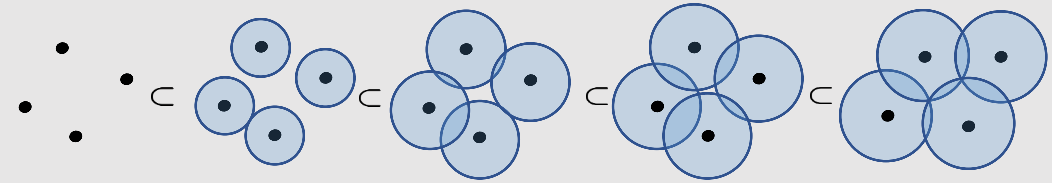
1パラメータのパーシステンス加群

データ



フィルトレーション

$$\chi := X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset X_4 \subset X_5$$



ホモロジー群を取る

パーシステンス加群

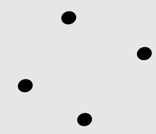
$$H_i(\chi) := H_i(X_1) \to H_i(X_2) \to H_i(X_3) \to H_i(X_4) \to H_i(X_5)$$

ガブリエルの定理(の一部)

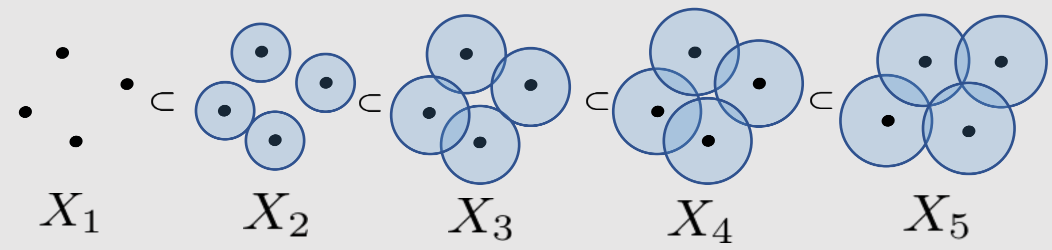
パーシステンス加群

1パラメータのパーシステンス加群

データ



フィルトレーション $\chi :=$



ホモロジー群を取る

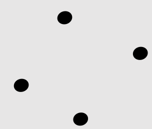
パーシステンス加群 $H_i(\chi) := H_i(X_1) \to H_i(X_2) \to H_i(X_3) \to H_i(X_4) \to H_i(X_5)$

ガブリエルの定理(の一部)　加群の構造定理

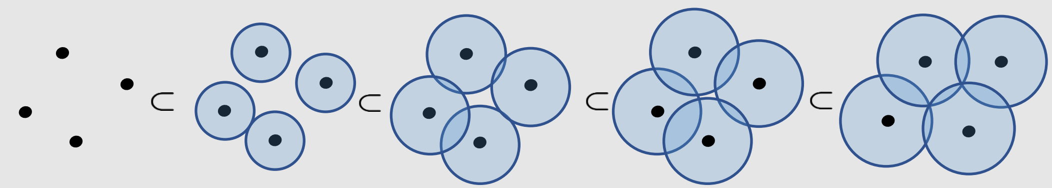
パーシステンス加群 $H_i(\chi) \cong \bigoplus_{j=1}^{n} (I[b_j, d_j])$

1パラメータのパーシステンス加群

データ



フィルトレーション $\chi :=$



ホモロジー群を取る

パーシステンス加群 $H_i(\chi) := \ H_i(X_1) \to H_i(X_2) \to H_i(X_3) \to H_i(X_4) \to H_i(X_5)$

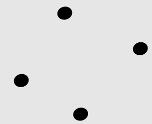
ガブリエルの定理(の一部)

パーシステンス加群 $H_i(\chi) \cong \bigoplus_{j=1}^{n} (I[b_j, d_j])$

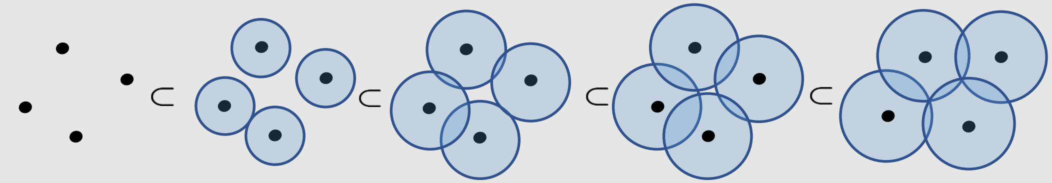
$$I[b_j, d_j] = \cdots \to 0 \to \overset{b_j}{K} \to \cdots \to \overset{d_j}{K} \to 0 \to \cdots$$

1パラメータのパーシステンス加群

データ



フィルトレーション $\chi :=$



ホモロジー群を取る

パーシステンス加群 $H_i(\chi) := H_i(X_1) \to H_i(X_2) \to H_i(X_3) \to H_i(X_4) \to H_i(X_5)$

ガブリエルの定理(の一部)

パーシステンス加群 $H_i(\chi) \cong \bigoplus_{j=1}^{n} (I[b_j, d_j])$

$$I[b_j, d_j] = \cdots \to 0 \to \overset{b_j}{K} \to \cdots \to \overset{d_j}{K} \to 0 \to \cdots$$

パーシステント図

本日の発表の流れ

■位相的データ解析とは？

■1パラメータのパーシステンス加群

■2パラメータのパーシステンス加群

■区間表現

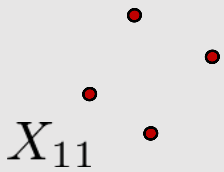
2パラメータのパーシステンス加群

定義
2つの全順序集合 P,Q($\{1, \cdots, n\}$, $\{1, \cdots, m\}$)
に対して、P×Q上の半順序≦を
$(p,q) \leqq (p', q') \Leftrightarrow p \leqq p'$ かつ $q \leqq q'$
で定める.

P×Qから有限次ベクトル空間の圏への関手を2パラメータのパーシステンス加群と呼ぶ.

2パラメータのパーシステンス加群

データ



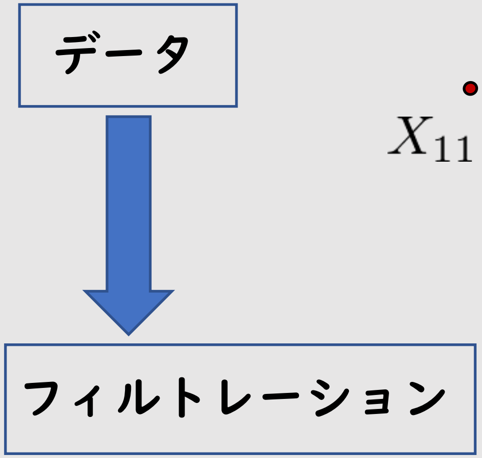
2パラメータのパーシステンス加群

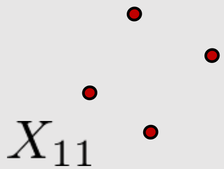
データ

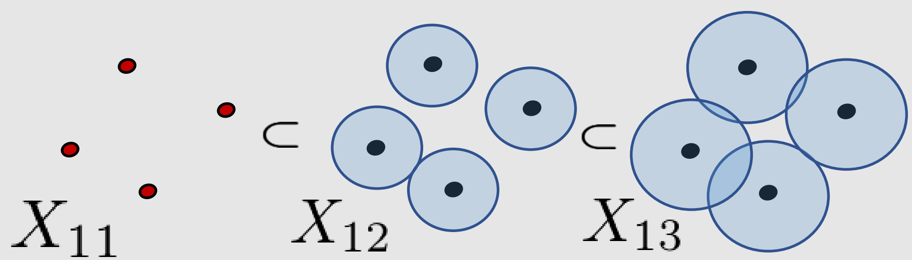
↓

フィルトレーション

2パラメータのパーシステンス加群



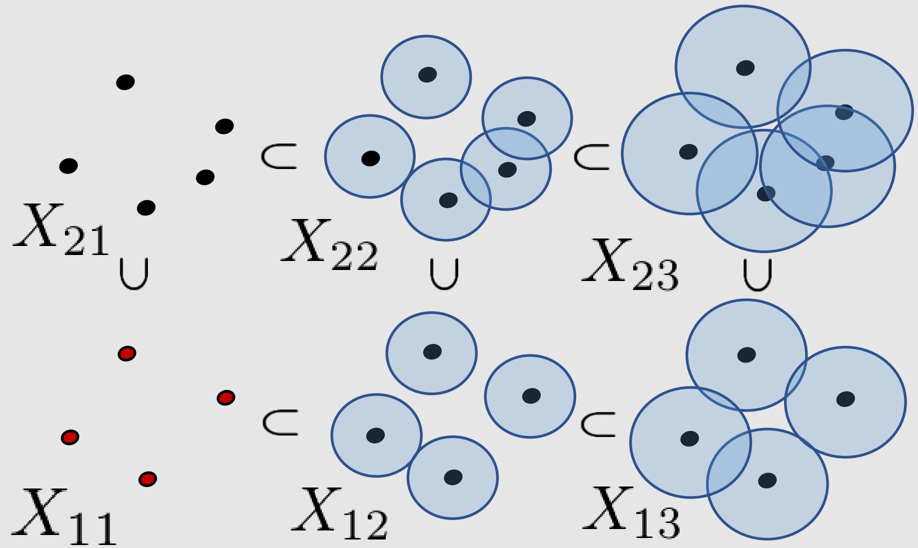




2パラメータのパーシステンス加群

データ

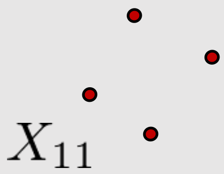
フィルトレーション

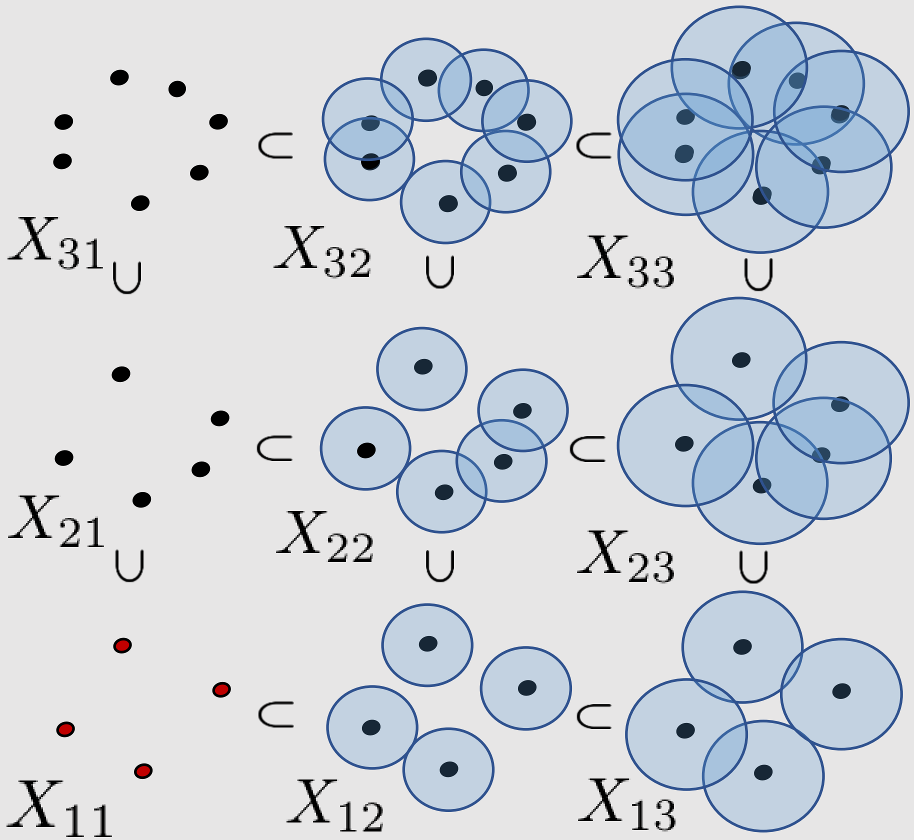


2パラメータのパーシステンス加群

データ

フィルトレーション



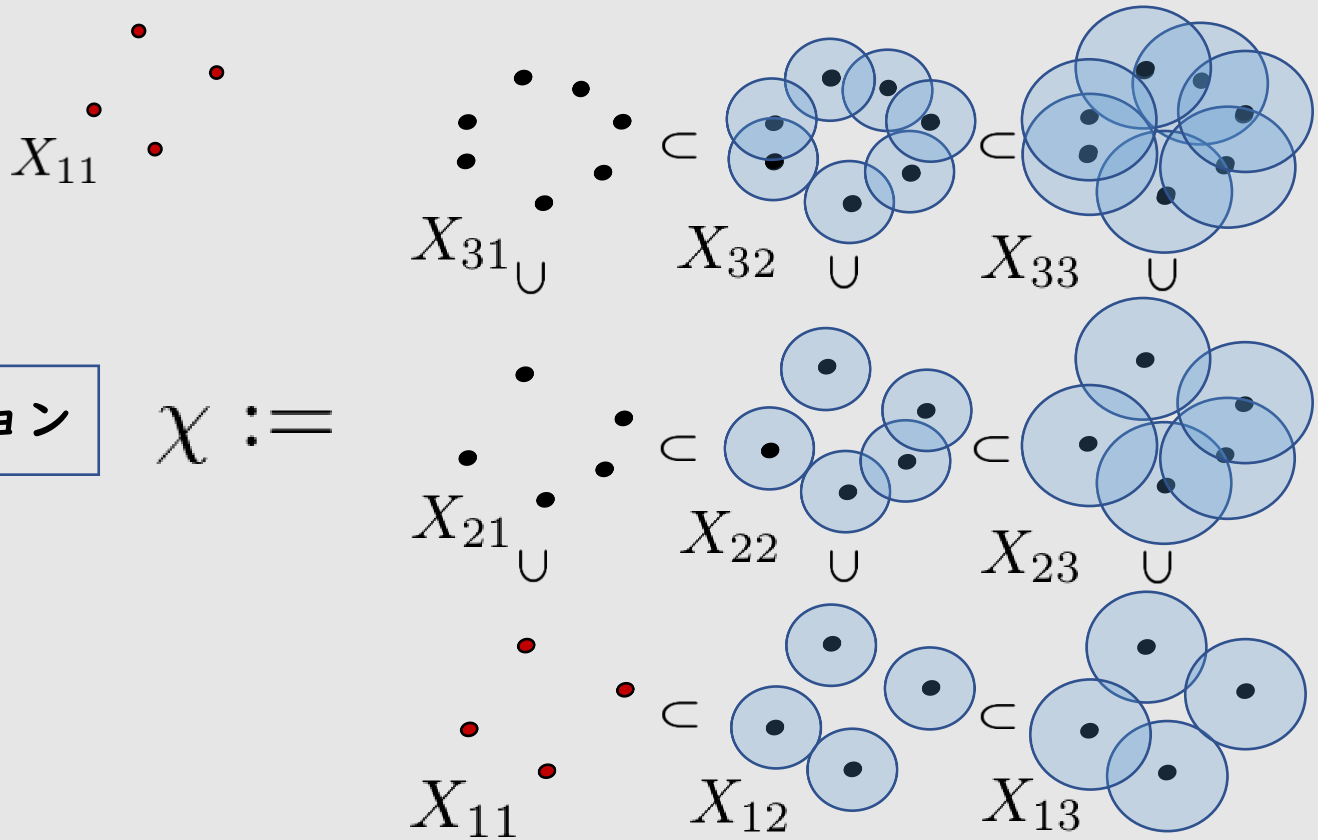


2パラメータのパーシステンス加群

データ

↓

フィルトレーション

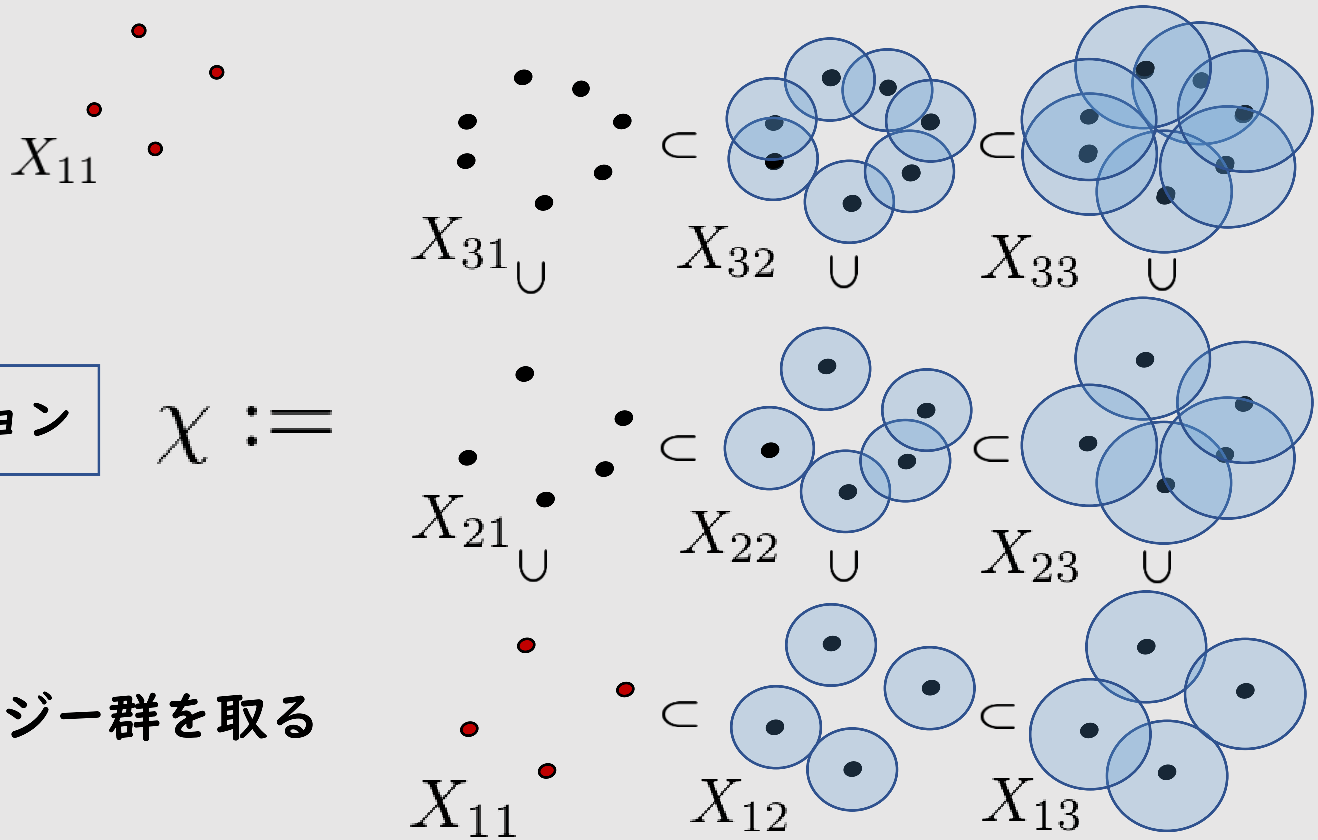


2パラメータのパーシステンス加群

データ

フィルトレーション

ホモロジー群を取る

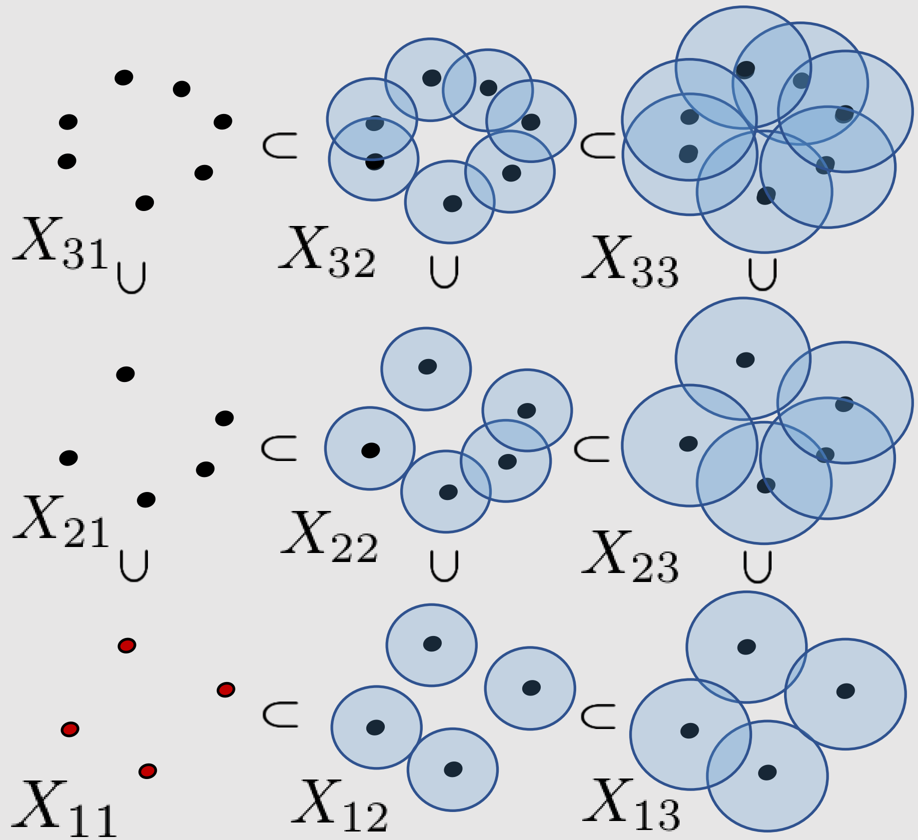


2パラメータのパーシステンス加群

データ

フィルトレーション

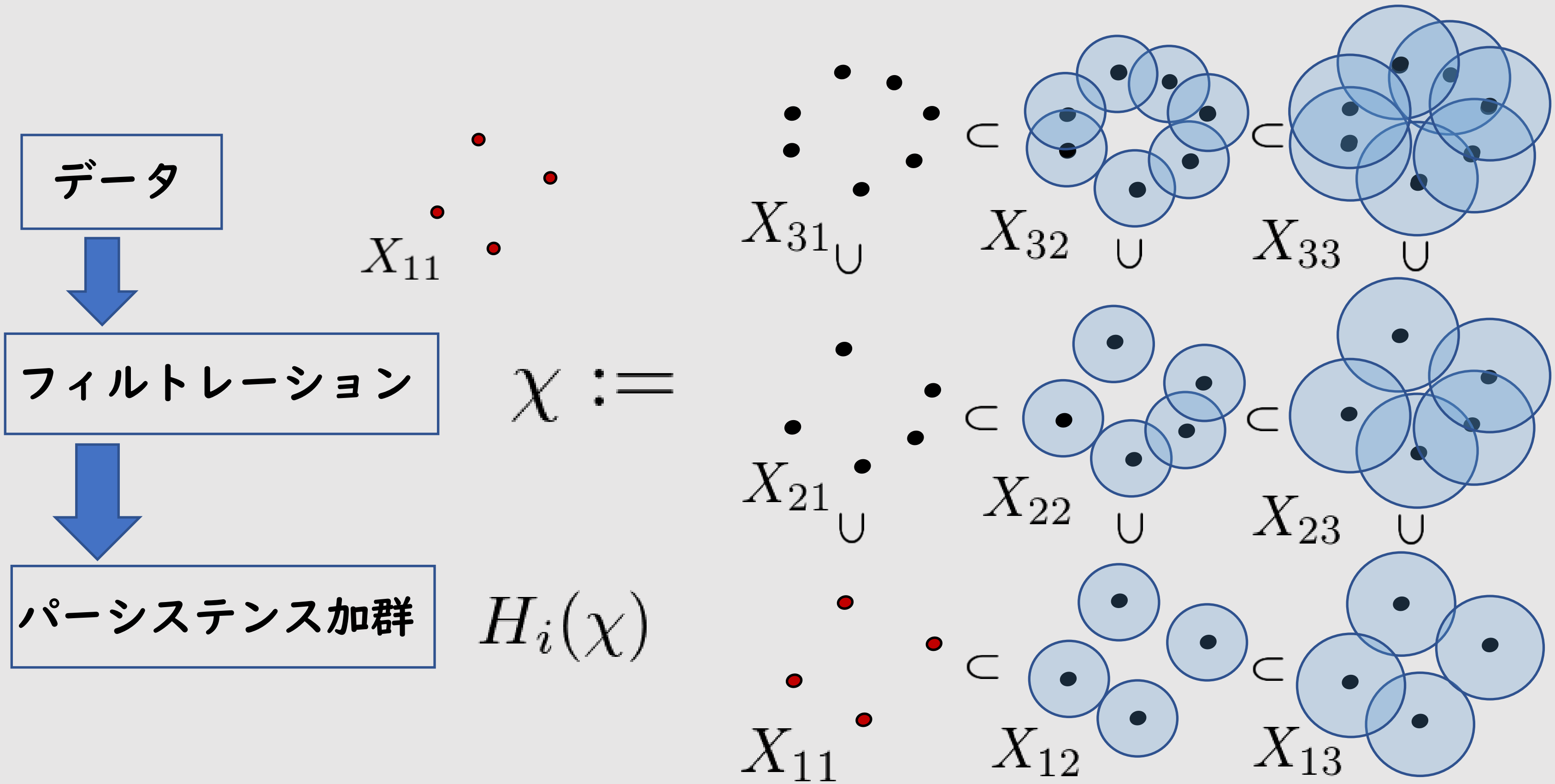
$\chi :=$



ホモロジー群を取る

パーシステンス加群

$H_i(\chi)$


データ
フィルトレーション
パーシステンス加群
X_{11}
$\chi :=$
$H_i(\chi)$
X_{31} $\subset$ X_{32} $\subset$ X_{33}
$\cup$ $\cup$ $\cup$
X_{21} $\subset$ X_{22} $\subset$ X_{23}
$\cup$ $\cup$ $\cup$
X_{11} $\subset$ X_{12} $\subset$ X_{13}

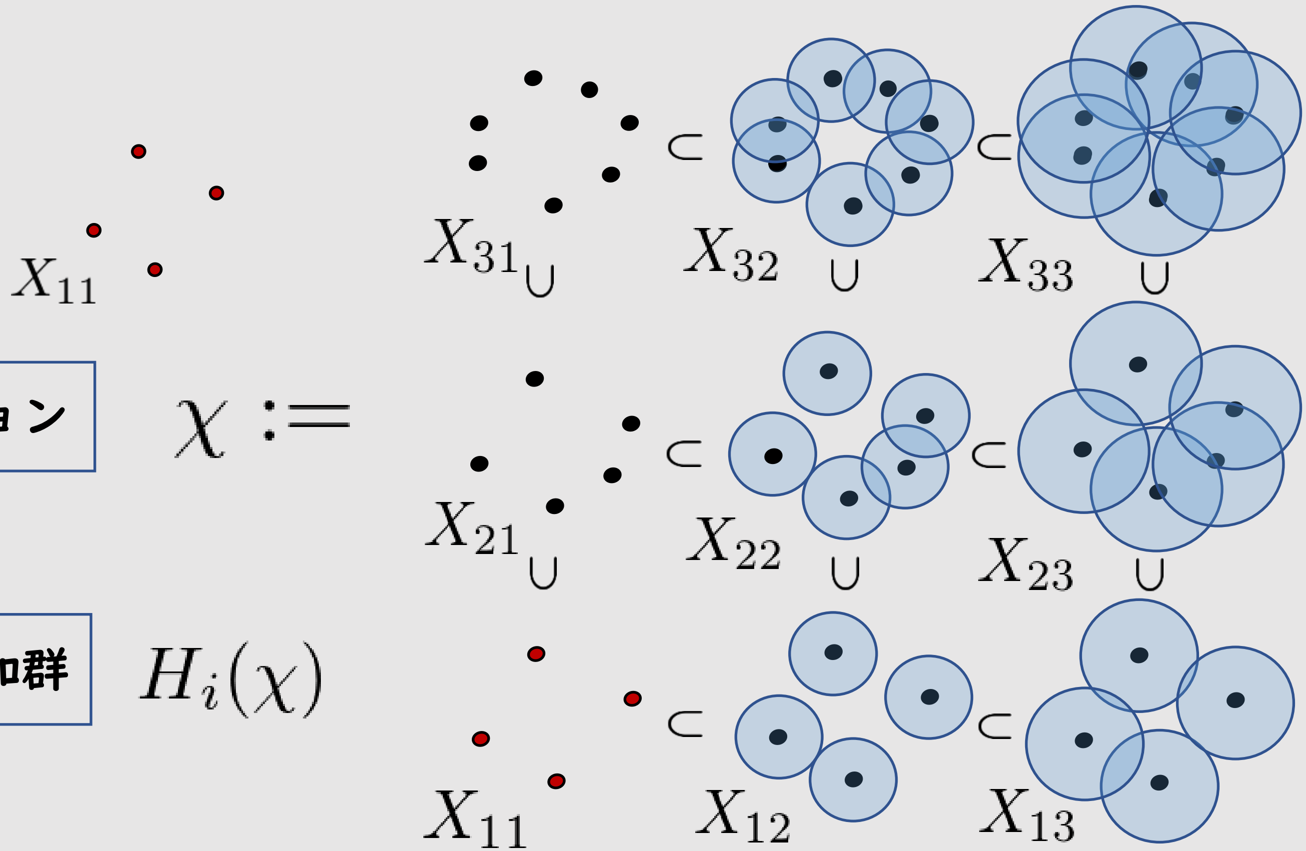
データ

↓

フィルトレーション

↓

パーシステンス加群



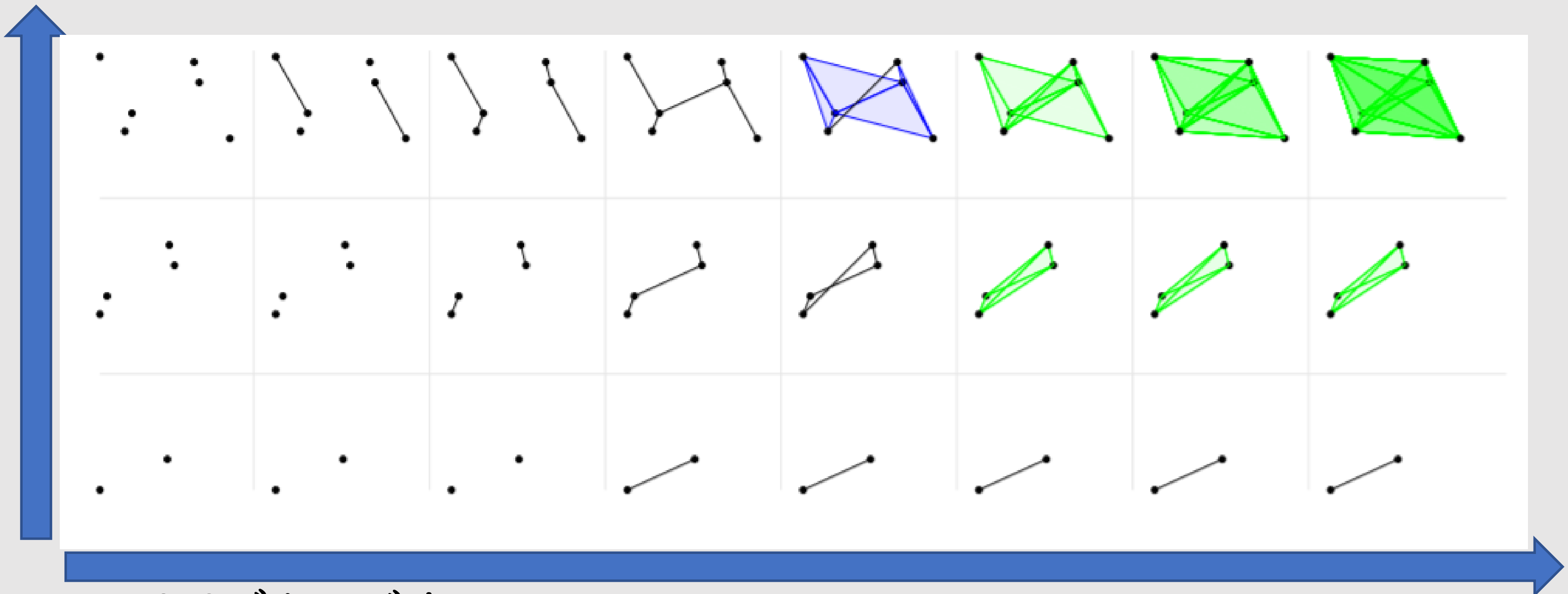
なぜこんなものを考える？

2パラメータのパーシステンス加群

なぜ？

例　データに幾何以外の情報を持たせる(部分電化，創薬の研究)

(部分電化)



2,3ブタンジオール

(半径)

PHoS: Persistent Homology for Virtual Screening
Bryn Keller, Michael Lesnick, Ted Willke

2パラメータのパーシステンス加群

なぜ？

例　・データに幾何以外の情報を持たせる(部分電化)

・ノイズ削除、パラメータに点の密度を持たせる

・画像解析？（白黒の濃淡）

・曲率

1パラメータよりもデータを理解できる？

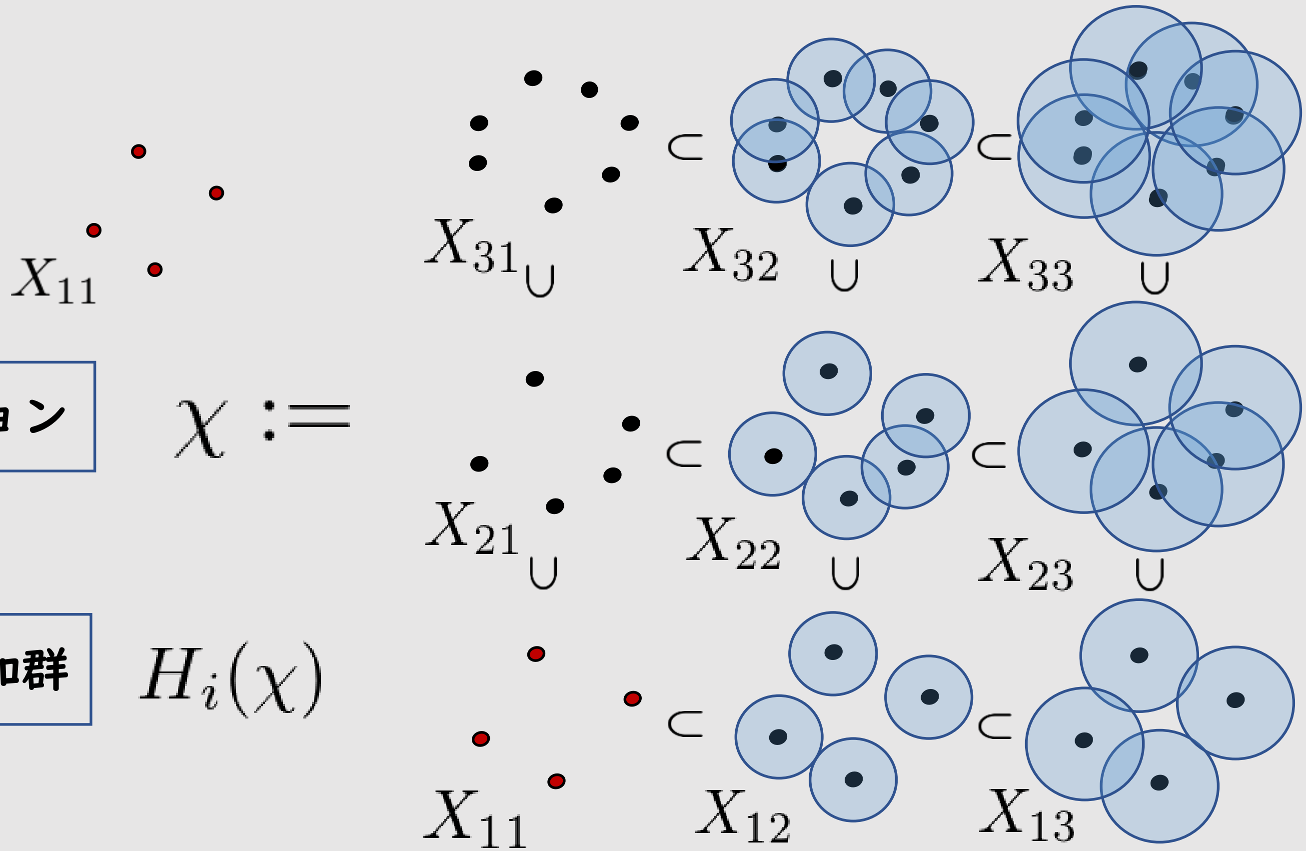
データ

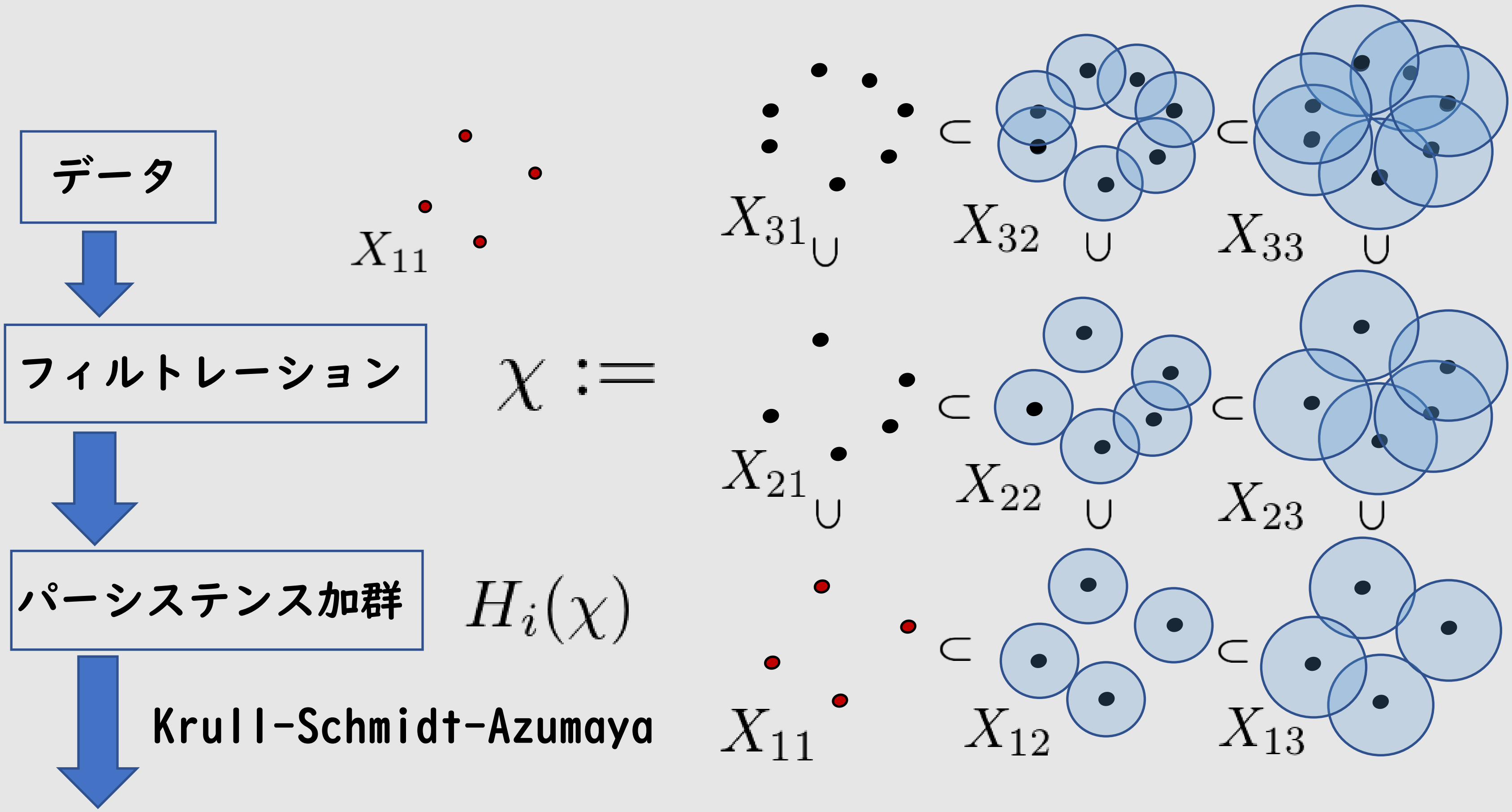
↓

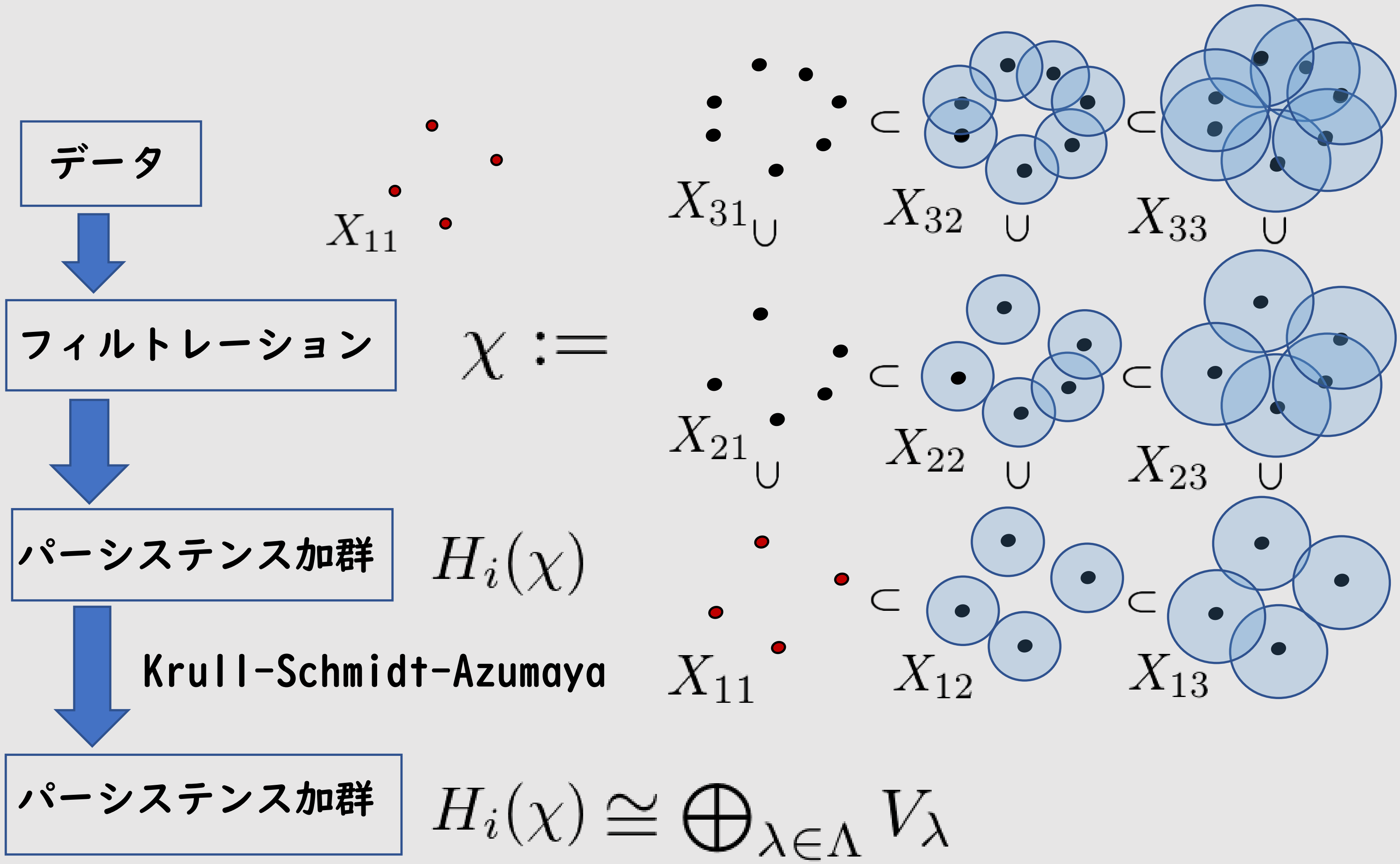
フィルトレーション

↓

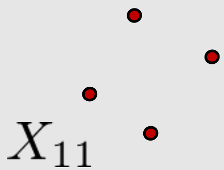
パーシステンス加群




データ
X_{11}
フィルトレーション
$\chi :=$
$X_{31} \subset X_{32} \subset X_{33}$
$X_{21} \subset X_{22} \subset X_{23}$
$X_{11} \subset X_{12} \subset X_{13}$
パーシステンス加群
$H_i(\chi)$
Krull-Schmidt-Azumaya

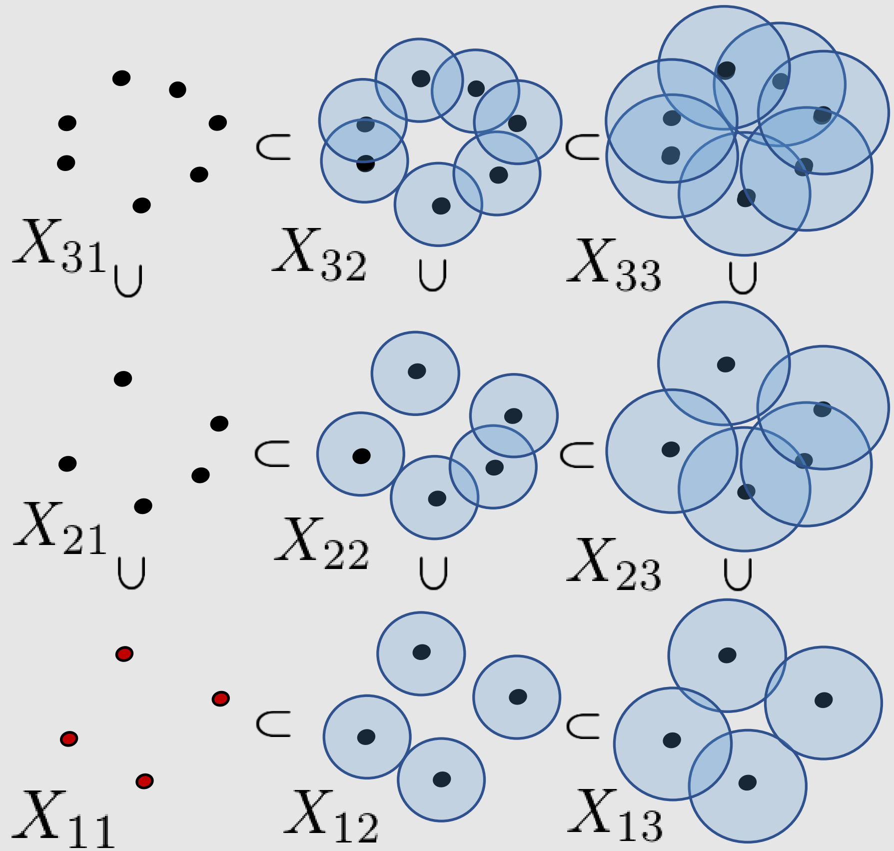

データ
フィルトレーション
パーシステンス加群
Krull-Schmidt-Azumaya
パーシステンス加群
$\chi :=$
$H_i(\chi)$
$H_i(\chi) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$
X_{11}
X_{31}
X_{32}
X_{33}
X_{21}
X_{22}
X_{23}
X_{11}
X_{12}
X_{13}

データ



フィルトレーション

$$\chi :=$$



パーシステンス加群 $H_i(\chi)$

Krull-Schmidt-Azumaya

パーシステンス加群 $H_i(\chi) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$

? どのようにして図を得る？

パーシステント図

2パラメータのパーシステンス加群

2パラメーターのパーシステンス加群の例

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[r] & K \arrow[r] & K \arrow[r] & K \\
K \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[u] \\
K \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[r] \arrow[u] & K. \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[r] & K \arrow[r] & O \arrow[r] & O \\
K \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[r] \arrow[u] & O \arrow[u] \\
O \arrow[r] \arrow[u] & O \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[r] \arrow[u] & K. \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

2パラメータのパーシステンス加群

2パラメーターのパーシステンス加群の例

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[r] & K \arrow[r] & K \arrow[r] & K \\
K \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[u] \\
K \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[r] \arrow[u] & K. \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[r] & K \arrow[r] & O \arrow[r] & O \\
K \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[r] \arrow[u] & O \arrow[u] \\
O \arrow[r] \arrow[u] & O \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[r] \arrow[u] & K. \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

2パラメータのパーシステンス加群

2パラメーターのパーシステンス加群の例

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[r] & K \arrow[r] & K \arrow[r] & K \\
K \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[u] \\
K \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[r] \arrow[u] & K. \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[r] & \underline{K} \arrow[r] & O \arrow[r] & O \\
\underline{K} \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[r] \arrow[u] & \underline{K} \arrow[r] \arrow[u] & O \arrow[u] \\
O \arrow[r] \arrow[u] & O \arrow[r] \arrow[u] & \underline{K} \arrow[r] \arrow[u] & \underline{K}. \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

2パラメータのパーシステンス加群

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[r] & K \arrow[r] & K & & & & & & & & \\
K \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[r, "\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}"] \arrow[u] & K^2 \arrow[r, "\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}"] \arrow[u, "\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}"] & K \arrow[r] & K & & & & & & \\
K \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[r, "\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}"] \arrow[u] & K^2 \arrow[r] \arrow[u] & K^2 \arrow[r] \arrow[u, "\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}"] & K^2 \arrow[r, "\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}"] \arrow[u, "\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}"] & K \arrow[r] & K & & & & \\
& & & & K \arrow[r] \arrow[u, "\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}"] & \color{red}{0} \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[u] & & & & \\
& & & & K \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[r, "\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}"] \arrow[u] & K^2 \arrow[r] \arrow[u, "\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}"] & K^2 \arrow[r] & K^2 \arrow[r, "\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}"] & K \arrow[r] & K \\
& & & & & & K \arrow[r] \arrow[u, "\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}"] & K \arrow[r, "\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}"] \arrow[u, "\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}"] & K^2 \arrow[r, "\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}"] \arrow[u] & K \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[u] \\
& & & & & & & & K \arrow[r] \arrow[u, "\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}"] & K \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

M.Buchet, Emerson G. Escolar “Every 1D Persistence Module is a Restriction of Some Indecomposable 2D Persistence Module”
Journal of Applied and Computational Topology

2パラメータのパーシステンス加群

1.

2.

2パラメータのパーシステンス加群

1. パーシステンス加群

$$H_i(\chi) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$$

が複雑

2.

2パラメータのパーシステンス加群

1. パーシステンス加群

$$H_i(\chi) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$$

が複雑

（1パラメータのとき $\bigoplus_{j=1}^{n}(I[b_j, d_j])$ ）

2.

2パラメータのパーシステンス加群

1. パーシステンス加群

$$H_i(\chi) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$$

　が複雑

(1パラメータのとき $\bigoplus_{j=1}^{n}(I[b_j, d_j])$)

2. 無限表現型であることが知られている
　(直既約加群が無限にある)

2パラメータのパーシステンス加群

1. パーシステンス加群

$$H_i(\chi) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$$

が複雑

（1パラメータのとき $\bigoplus_{j=1}^{n}(I[b_j, d_j])$ ）

2. 無限表現型であることが知られている
（直既約加群が無限にある）

➡ パーシステント図を定めるのが難しい
（従って応用が難しい）

2パラメータのパーシステンス加群

⇒ パーシステント図を定めるのが難しい
(従って応用が難しい)

⇒ 1パラメータの時のようにデータを記述する
方法を探す必要がある!!!!

2パラメータのパーシステンス加群

- パーシステント図を定めるのが難しい
(従って応用が難しい)

- 1パラメータの時のようにデータを記述する
方法を探す必要がある!!!!

- 区間表現を紹介します

本日の発表の流れ

- ■位相的データ解析とは？
- ■1パラメータのパーシステンス加群
- ■2パラメータのパーシステンス加群
- ■区間表現

定義　P上のパーシステンス加群

Pを半順序集合とする.
Pから有限次ベクトル空間の圏への関手を
P上のパーシステンス加群と呼ぶ.

定義　区間

定義　区間

Pを半順序集合，Pの部分集合$\mathcal{I}$をPの順序から定まる半順序集合とする．このとき，$\mathcal{I}$が次の2つを満たすとき，区間と呼ばれる．

定義　区間

Pを半順序集合，Pの部分集合$\mathcal{I}$をPの順序から定まる半順序集合とする．このとき，$\mathcal{I}$が次の2つを満たすとき，区間と呼ばれる．

1，a,bが$\mathcal{I}$の元で$a \leqq c \leqq b$　ならば　cは$\mathcal{I}$の元である．
2，

定義　区間

Pを半順序集合，Pの部分集合$\mathcal{I}$をPの順序から定まる半順序集合とする．このとき,$\mathcal{I}$が次の2つを満たすとき，区間と呼ばれる．

1，a,bが$\mathcal{I}$の元でa≦c≦b　ならば　cは$\mathcal{I}$の元である．
2，任意のa,b に対して、a～c1～…～ck～bとなるようなc1，…,ckが$\mathcal{I}$上に存在する．
ただし、「～」は　≧　または　≦　である．

定義　区間

Pを半順序集合，Pの部分集合$\mathcal{I}$をPの順序から定まる半順序集合とする．このとき，$\mathcal{I}$が次の2つを満たすとき，区間と呼ばれる．

1，a,bが$\mathcal{I}$の元でa≦c≦b　ならば　cは$\mathcal{I}$の元である．
2，任意のa,b に対して、a～c1～…～ck～bとなるようなc1，…,ckが$\mathcal{I}$上に存在する．
ただし、「～」は　≧　または　≦　である．

2番目の条件を連結性と呼びます

定義　区間

Pを半順序集合，Pの部分集合$\mathcal{I}$をPの順序から定まる半順序集合とする．このとき，$\mathcal{I}$が次の2つを満たすとき，区間と呼ばれる．

1，a,bが$\mathcal{I}$の元でa≦c≦b　ならば　cは$\mathcal{I}$の元である．
2，任意のa,b に対して、a～c1～…～ck～bとなるようなc1，…,ckが$\mathcal{I}$上に存在する．
ただし、「～」は　≧　または　≦　である．

2番目の条件を連結性と呼びます

Ex. $\mathbb{N}$ の部分集合$\{1, \cdots, n\}$は区間である

定義　区間表現(区間加群)

Pを半順序集合，Pの部分集合$\mathcal{I}$を区間とする.
このとき、Pから有限次元ベクトル空間の圏への関手
$\boldsymbol{K}_{\mathcal{I}}$

$$(K_{\mathcal{I}})(a) := \begin{cases} K & (a \in \mathcal{I}) \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

$$(K_{\mathcal{I}})(a \to b) := \begin{cases} id_K & (a,\ b \in \mathcal{I}) \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

に同型なものを区間表現と呼ぶ。

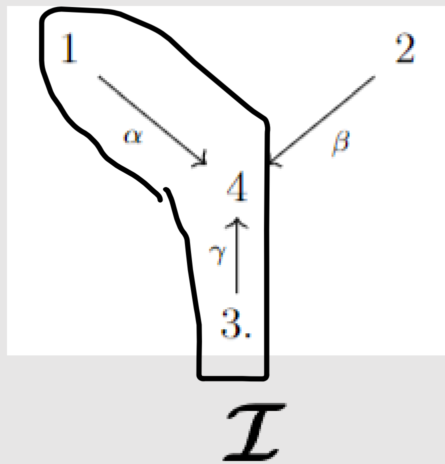
例　区間表現(区間加群)

半順序集合

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "\alpha"'] & & 2 \arrow[dl, "\beta"] \\
& 4 & \\
& 3. \arrow[u, "\gamma"] &
\end{tikzcd}$$

例　区間表現(区間加群)

半順序集合



例　区間表現(区間加群)

半順序集合

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "\alpha"] & & 2 \arrow[dl, "\beta"'] \\
& 4 & \\
& 3. \arrow[u, "\gamma"] &
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{I}$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "id"'] & & O \arrow[dl, "O"] \\
& K & \\
& K \arrow[u, "id"] &
\end{tikzcd}$$

区間表現 $K_{\mathcal{I}}$

例　区間表現(区間加群)

半順序集合

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "\alpha"'] & & 2 \arrow[dl, "\beta"] \\
& 4 & \\
& 3. \arrow[u, "\gamma"] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "id"'] & & O \arrow[dl, "O"] \\
& K & \\
& K \arrow[u, "id"] &
\end{tikzcd}$$

区間表現

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "{(1,1)^t}"'] & & K \arrow[dl, "{(1,0)^t}"] \\
& K \oplus K & \\
& K \arrow[u, "{(0,1)^t}"] &
\end{tikzcd}$$

区間表現でない

定義　区間分解可能

Pを半順序集合，V をP上のパーシステンス加群.

$V \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ において各 V_λ が区間表現であるならばVは区間分解可能という

例　区間表現

半順序集合

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "\alpha"'] & & 2 \arrow[dl, "\beta"] \\
& 4 & \\
& 3. \arrow[u, "\gamma"] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "id"'] & & O \arrow[dl, "O"] \\
& K & \\
& K \arrow[u, "id"] &
\end{tikzcd}
$$

区間表現

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "(1{,}1)^t"'] & & K \arrow[dl, "(1{,}0)^t"] \\
& K \oplus K & \\
& K \arrow[u, "(0{,}1)^t"] &
\end{tikzcd}
$$

区間表現でない

区間分解不可能

ガブリエルの定理(の一部)

任意の1パラメータのパーシステンス加群は
区間分解可能

$$H_i(\chi) \cong \bigoplus_{j=1}^{n} (I[b_j, d_j])$$

$$I[b_j, d_j] = \cdots \to 0 \to K \to \cdots \to K \to 0 \to \cdots$$

ガブリエルの定理(の一部)

任意の1パラメータのパーシステンス加群は
区間分解可能

$$H_i(\chi) \cong \bigoplus_{j=1}^{n} (I[b_j, d_j])$$
$$I[b_j, d_j] = \cdots \to 0 \to K \to \cdots \to K \to 0 \to \cdots$$

どんなフィルトレーション(半順序集合)を考えれば
パーシステンス加群は常に区間分解可能なのか???

(簡単なパーシステンス加群しかでないならば応用
しやすそう)

結果(Pは連結な半順序集合とする)

任意のP上のパーシステンス加群が区間分解可能である.
⇔
Pが以下の半順序集合で表される.

ただし、←→はどちらかの向きを任意に選ぶ.

$$1 \longleftrightarrow 2 \longleftrightarrow 3 \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow n,$$

$$\vec{A}_{n,m} := \begin{tikzcd} & a_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & a_n \arrow[dr] & \\ s \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & t \\ & b_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & b_m \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

課題

1. どのような応用があたえることができるのか?

課題

1. どのような応用があたえることができるのか?

2. 2パラメータのパーシステンス加群との関係は?

課題

1. どのような応用があたえることができるのか?

2. 2パラメータのパーシステンス加群との関係は?

まとめ

マルチフィルトレーションから構成されるマルチパラメータのパーシステンス加群は複雑

応用が難しい

単純なパーシステンス加群(区間表現)しかでないようなフィルトレーションを考えたい

フィルトレーションを決定した!

$$1 \longleftrightarrow 2 \longleftrightarrow 3 \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow n,$$

$$\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & a_n \arrow[dr] & \\
\vec{A}_{n,m} := s \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & t \\
 & b_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & b_m \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

課題

1パラメータ

データ

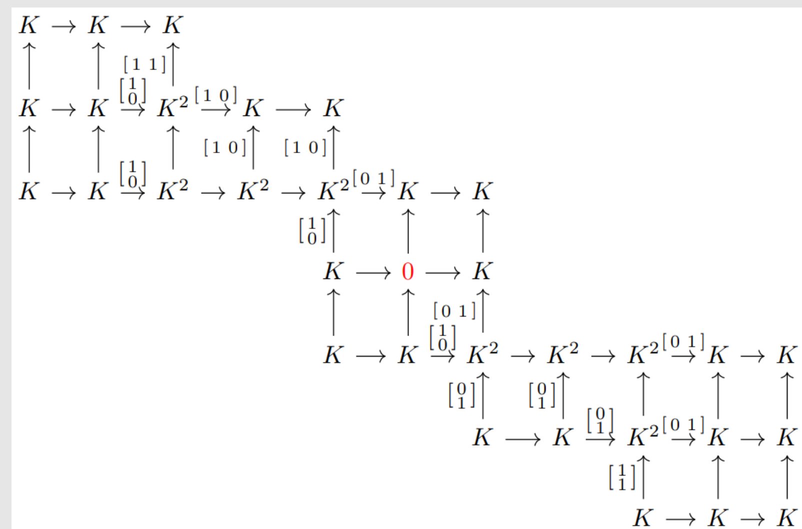
2パラメータ

$$\bigoplus_{j=1}^{n}(I[b_j, d_j])$$

パーシステンス加群

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$$

$$I[b_j, d_j] = \cdots \to 0 \to \overset{b_j}{K} \to \cdots \to \overset{d_j}{K} \to 0 \to \cdots$$



パーシステント図

パーシステント図

課題

データ

フィルトレーション

ここのフィルトレーションをうまくとれば
パーシステンス加群がそんなに複雑にならないの
ではないか？

パーシステンス加群

Krull-Schmidt-Azumaya

パーシステンス加群

$$H_i(\chi) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$$

?

パーシステント図

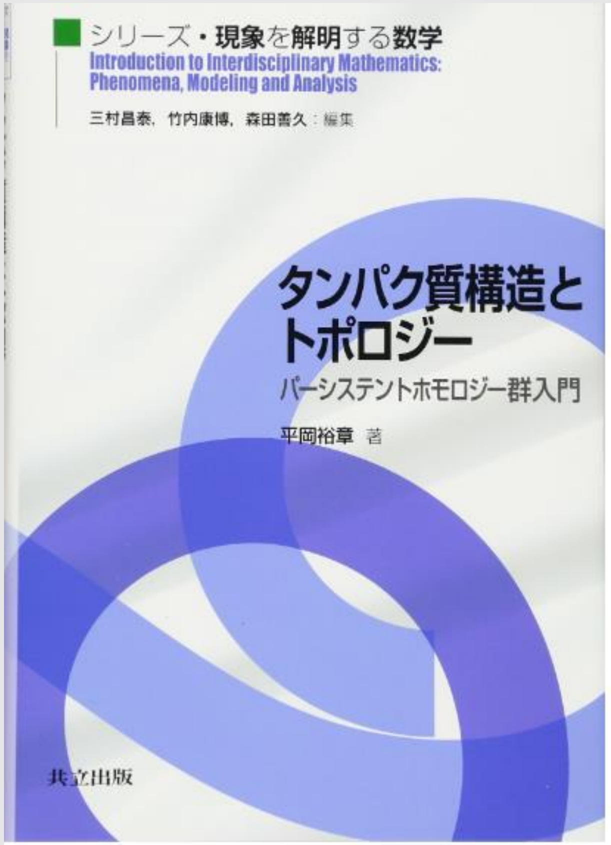
参考文献

- Herbert Edelsbrunner, David Letscher, and Afra Zomorodian“Topological Persistence and Simplification”
- 平岡裕章“タンパク質構造とトポロジー　パーシステントホモロジー群入門”
- Gunner Carlsson, Afra Zomorodian “The Theory of Multidimensional Persistence”
- Michael Lesnick “Lecture notes for Math 840: Multiparameter Persistence”
- Bryn Keller, Michael Lesnick, Ted Willke “PHoS: Persistent Homology for Virtual Screening”
- Paul Balmer “Tensor triangular geometry”
- Magnus Bakke Botnan and Michael Lesnick“An Introduction to Multiparameter Persistence”
- The RIVET Developers. Rivet, version 1.1. https://github.com/rivetTDA/, 2020.

参考文献

- Benjamin Blanchette, Thomas Brüstle, Eric J. Hanson, “Homological approximations in persistence theory”
- Aaron Adcock, Erik Carlsson, Gunnar Carlsson “The Ring of Algebraic Functions on Persistence Bar Codes”
- Sara Kalisnik, “Tropical Coordinates on the Space of Persistence Barcodes”
- Jacek Skryzalin, Gunner Carlsson, “NUMERIC INVARIANTS FROM MULTIDIMENSIONAL PERSISTENCE
- Gunnar Carlsson “Topological pattern recognition for point cloud data”
- Woojin Kim, Samantha Moore , “The Generalized Persistence Diagram Encodes the Bigraded Betti Numbers”
- Heather A. Harrington, Nina Otter, Hal Schenck, Ulrike Tillmann “Stratifying multiparameter persistent homology”
- M. Buchet, E. G. Escolar “Every 1D Persistence Module is a Restriction of Some Indecomposable 2D Persistence Module”

タンパク質構造とトポロジー
1パラメータのパーシステンス加群の代わりに次数付き多項式環での構造定理を用いたデータの記述方法が書かれている



パーシステンス加群と環の理論の関係

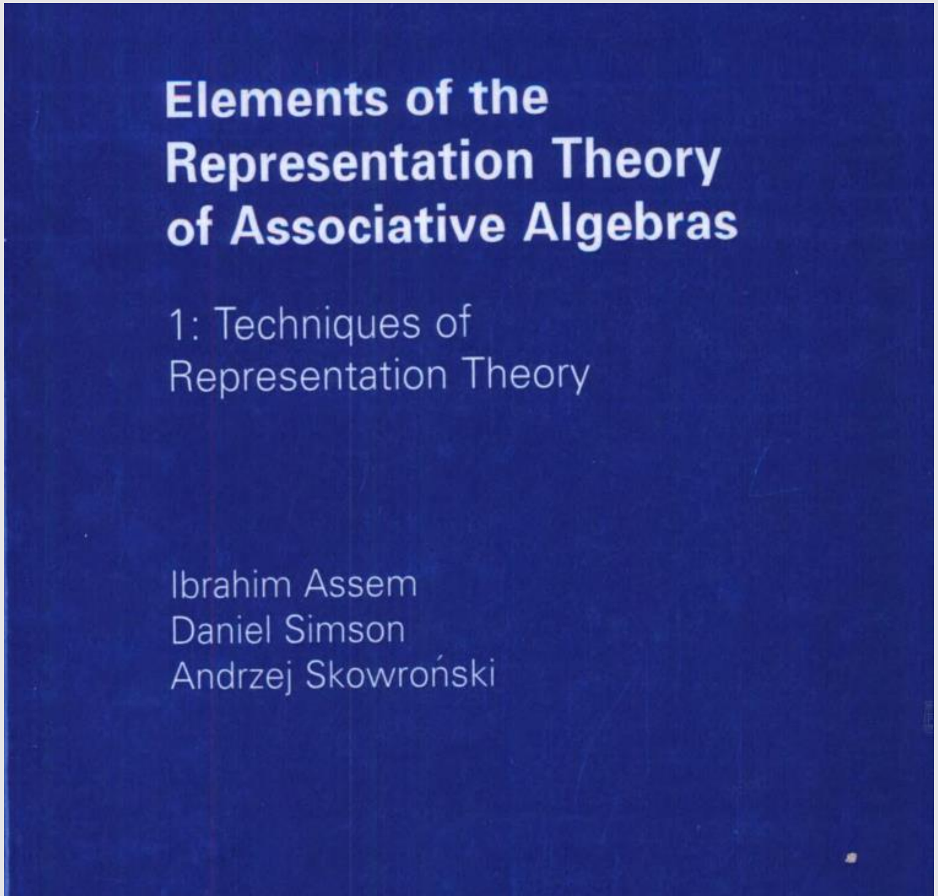
可換環論(代数幾何)の視点から研究もされている

半順序集合 $(\mathbb{N}^n, \leq)$ を次のように定める。

$$(a_1, \ldots, a_n) \leq (b_1, \ldots, b_n) :\iff a_i \leq b_i \text{ for all } i$$

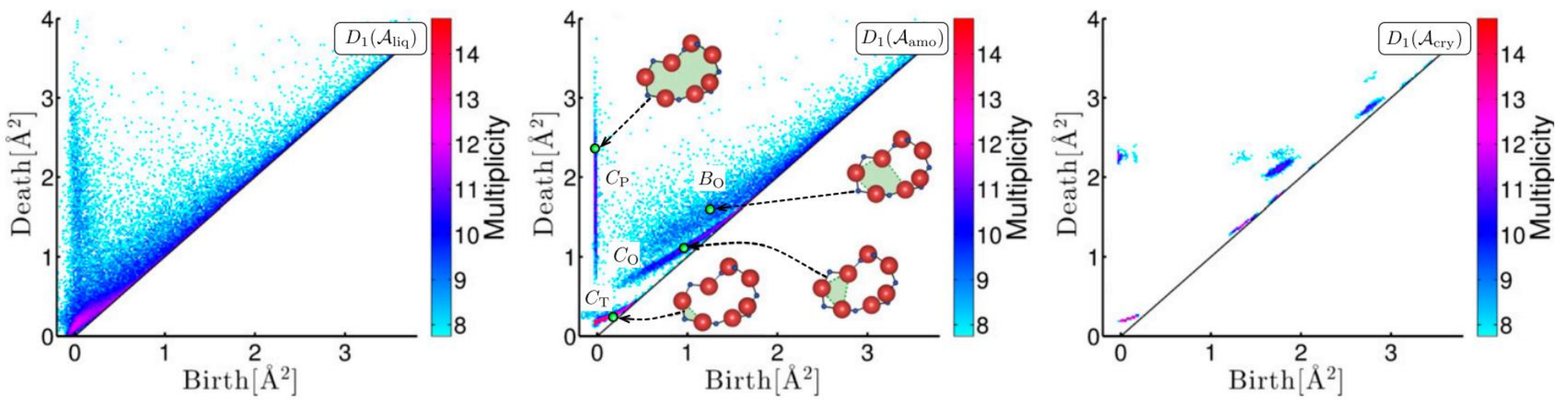
$$\mathrm{Fun}(\mathbb{N}^n, \mathbf{Vect}) \cong (n\text{-}\mathbf{Mod})$$

Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Volume 1:
クイバーの表現論の本
パーシステンス加群とpath algebra上の加群の関係も述べられている
ガブリエルの定理など



位相的データ解析とは？

材料科学（Ex.ガラスの構造）



Y. Hiraoka et al. “Hierarchical structures of amorphous solids characterized by persistent homology” Proceedings of the National Academy of Sciences